

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
„ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**

**Конохов В.І.  
Хавін В.Л.  
Автономова Л.В.**

## **РОЗРАХУНКИ СТЕРЖНІВ ПРИ КРУЧЕННІ**

Навчально-методичний посібник  
з розділу курсу „Опір матеріалів”  
для студентів машинобудівних спеціальностей

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 1 від 24.06.10

Харків НТУ „ХПІ” 2011

УДК 620.17  
ББК 30.121  
К64

Рецензенти: *В.М. Кошельник*, д-р техн. наук, проф.

Національний технічний університет „Харківський політехнічний інститут”,

*С.О. Вамболь*, канд.техн. наук, доцент,

Національний університет цивільного захисту України

**Конохов В.І.**

К64 Розрахунки стержнів при крученні : навчально-методичний посіб. з розділу курсу „Опір матеріалів” для студентів машинобудівних спеціальностей / В.І. Конохов, В.Л. Хавін, Л.В. Автономова – Х.: НТУ “ХПІ”, 2011. – 76 с.

ISBN

Розглядаються теоретичні основи розрахунків на кручення валів різноманітного поперечного перерізу, наведена методика розкриття статичної невизначуваності стержневих систем; надаються розрахункові схеми і чисельні дані для виконання індивідуальних розрахунково-проектувальних завдань, а також приклади їх розв’язання.

Призначено для студентів машинобудівних спеціальностей. Може бути корисним для викладачів, а також для аспірантів та наукових працівників.

Іл. 25. Табл. 5. Бібліогр: 3 назв.

ББК 30.121

© В.І. Конохов, В.Л. Хавін, Л.В. Автономова, 2011

ISBN

## **Вступ**

Реальні тіла можуть деформуватися, тобто змінювати свою форму й розміри. Деформації тіл відбуваються внаслідок прикладення до них зовнішніх навантажень. При деформуванні тіла його точки, а також лінії або перерізи переміщуються в площині або в просторі відносно свого вихідного положення. Однією з найважливіших задач опору матеріалів є оцінка міцності та жорсткості конструкції при довільних навантаженнях.

У даному посібнику розглядається один з основних простих видів деформації стержня: кручення.

Кручення виникає при дії на стержень зовнішніх сил, які утворюють момент відносно осі стержня. Деформація кручення супроводжується поворотом поперечних перерізів стержня один відносно одного навколо його осі.

# 1. Розрахунки на міцність і жорсткість при крученні

## 1.1. Основні поняття та визначення

Розповсюдженим стержневим елементом конструкцій машин, що працюють на кручення, є вал. Якщо навантаження на прямолінійний стержень (вал) складається тільки з моментів  $M_k$ , площини дії яких перпендикулярні до осі стержня, то із шести зусиль та моментів у довільному перерізі залишається лише один – крутний момент.

Відзначимо, що найчастіше зовнішній крутний момент виникає у валах, що обертаються з кутовою швидкістю  $n$  [об./хв.] та передають потужність  $K$  [кВт] (розподільні, передавальні вали зубчатих, пасових передач). У цьому випадку на валу в місцях посадки зубчатих коліс, шківів виникає зосереджений крутний момент, [кН·м]

$$M_k = 9,55 \frac{K}{n}. \quad (1.1)$$

Побудова епюр крутних моментів ґрунтується на тому, що внутрішній крутний момент  $M_k(z)$  у даному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів відносно осі стержня усіх сил, розташованих по один бік від перерізу. Якщо вал обертається рівномірно, то алгебраїчна сума всіх моментів дорівнює нулю. Тому при визначенні  $M_k$  матимемо один і той самий результат, незалежно від того, чи будемо брати суму моментів, розташованих ліворуч або праворуч від перерізу.

**Правило знаків:** крутний момент вважається додатним, якщо при спостереганні з торця вздовж осі частини, що розглядається, він намагається обертати розглянуту область (відсічену частину) проти годинникової стрілки і навпаки.

Сформулюємо правила для побудови і перевірки правильності епюр крутних моментів:

1. При побудові епюр варто перевіряти рівновагу вала, тобто  $\sum M_{zi} = 0$ .

2. На ділянці з інтенсивністю розподіленого моменту  $m = \text{const}$  епюра  $M_k$  лінійна, а якщо  $m = 0$ , то епюра  $M_k$  по довжині вала є кусочно-постійною по ділянках вала, тобто  $M_{ki} = \text{const}$ .

3. У точці прикладення зосередженого моменту на епюрі  $M_K$  спостерігається стрибок на величину зовнішнього моменту.

Експериментально встановлено, що при дії на вал двох протилежно спрямованих крутних моментів  $M_K$ , прикладених по його кінцях (рис. 1), вал буде закручуватися, тобто одні перерізи вала будуть повертатися щодо інших навколо осі, у той час як довжина вала залишається незмінною.

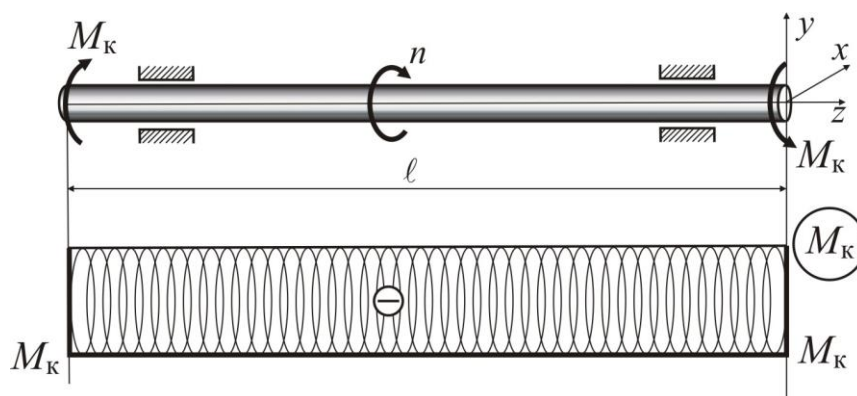


Рисунок 1

Якщо закручувати вал аж до руйнування і представити графічно залежність крутного моменту від кута закручування, то одержимо діаграму кручення, що у випадку пластичного матеріалу має вигляд діаграми, показаної на рис. 2. На цій діаграмі також, як і на діаграмі розтягання, можна відзначити ряд характерних точок, що відповідають характеристикам матеріалу при крученні: точка 1 відповідає максимальному значенню моменту  $M_{\text{пл}}$ , до якого зберігається лінійна залежність між навантаженням  $M_K$  і кутом закручування  $\varphi$ ; у точці 2 спостерігається явище текучості матеріалу при крученні, коли при практично постійному моменті  $M_T$  збільшується кут закручування; точка 3 відповідає максимальному значенню моменту  $M_{\text{max}}$ , при якому відбувається руйнування зразка.

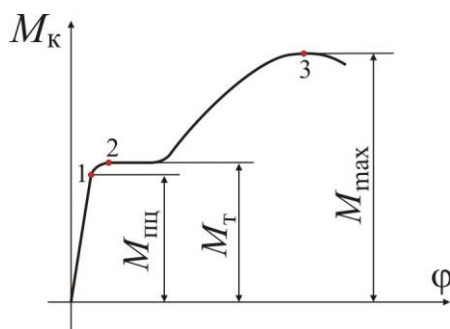


Рисунок 2

## 1.2. Дотичні напруження при крученні для стержня круглого чи кільцевого перерізу

Попередньо розглянемо експериментальні результати кручення стержнів круглого перерізу. На валу (рис. 3а) відзначимо утворюючі (меридіани) та поперечні перерізи (паралелі):

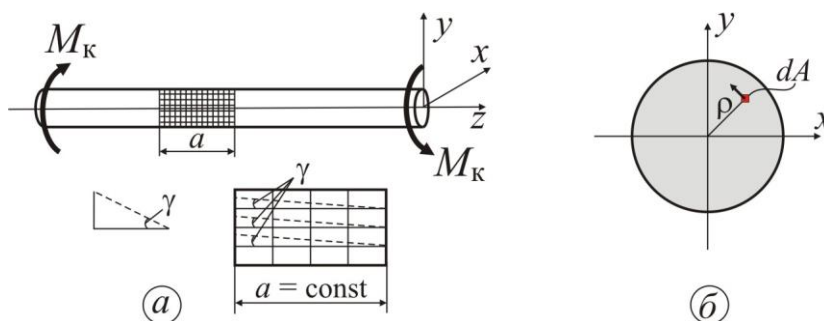


Рисунок 3

1. При крученні поперечні перерізи стержня повертаються навколо його осі і відносно один одного.

2. Твірні повертаються на один і той же кут  $\gamma$ . Квадрати перетворюються в ромби, прямі кути змінюються, як і у випадку чистого зсуву (рис. 3а). Це свідчить про те, що виділений елементарний об'єм будь-якого шару вала знаходиться в умовах чистого зсуву.

3. При крученні стержня круглого перерізу дотримується гіпотеза плоских перерізів: переріз плоский і нормальний до осі до деформації залишається плоским і нормальним до осі в процесі деформації.

4. Відстані між перерізами в процесі деформації не змінюються ( $a = \text{const}$ ), це підтверджує відсутність у перерізі нормальних напружень.

5. Довжина і прямолінійність радіусів перерізів не порушується, тобто дотичні напруження  $\tau$  у будь-якій точці перерізу перпендикулярні радіусу  $\rho$  (рис. 3б).

Розглянемо стержень діаметром  $d$ , довжиною  $\ell$ , що навантажений моментом  $M$  (рис. 4а). На відстані  $z$  виділимо елемент довжиною  $dz$  і розглянемо його рівновагу (рис. 4б). У лівому перерізі прикладемо діючий у ньому крутний момент  $M_k$ , а в правому перерізі замінимо  $M_k$  напруженням, що діє на елементарній площадці  $dA$  з координатами  $x, y$ , як показано на рис. 4б.

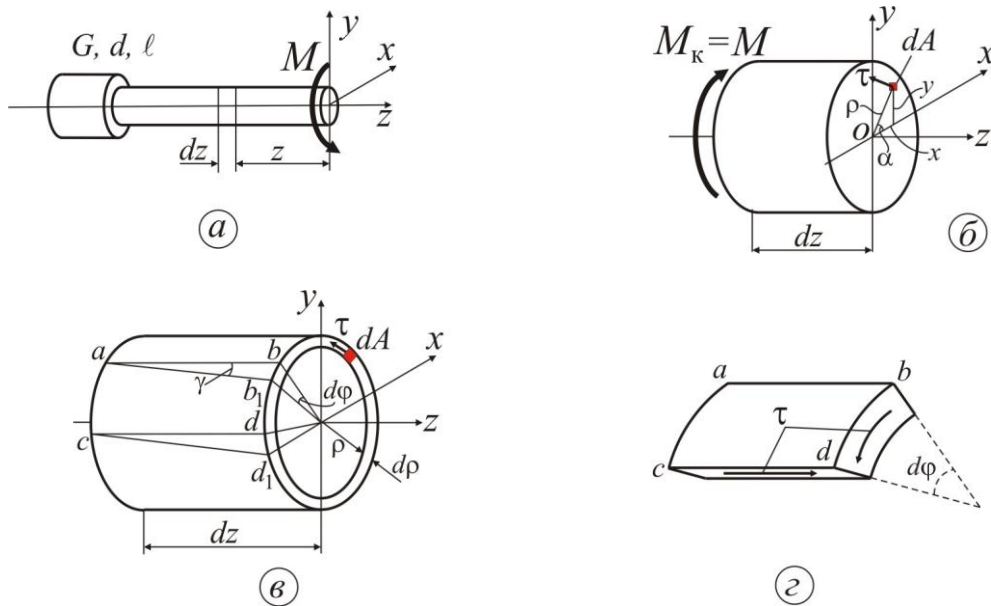


Рисунок 4

Вважаючи, що початок координат співпадає з центром ваги  $O$  перерізу, запишемо рівняння статичної рівноваги від елементарної сили  $dF = \tau \cdot dA$ , що діє на площадці  $dA$  (результуюча сила  $F = \int_A \tau dA$ ):

$$\sum F_x = \int_A \tau \cdot dA \cdot \sin \alpha = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum F_y = \int_A \tau \cdot dA \cdot \cos \alpha = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum M_z = M_k - \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = 0. \quad (1.4)$$

Оскільки невідомі величина і закон розподілу дотичного напруження  $\tau$ , кут кручення, положення нуля напружень, то рівняння рівноваги розв'язати неможливо. Таким чином, задача є статично невизначеною.

Для розкриття статичної невизначуваності проведемо геометричний аналіз деформацій при крученні. Для цього з нескінченно малої ділянки вала довжиною  $dz$  виділимо нескінченно тонке кільце товщиною  $d\rho$  (рис. 4в). Умовно вважаємо, що лівий переріз нерухомий. Правий переріз нескінченно малого циліндра повернеться навколо осі  $z$  на кут  $d\phi$ , причому  $\phi$  назвемо абсолютним кутом закручування, який є переміщенням при крученні. Твірні  $ab$  і  $cd$  на бічній поверхні циліндра переміщуються в положення  $ab_1$  і  $cd_1$  відповідно, зміщаючись на кут зсуву  $\gamma$ .

Обчислимо довжину дуги  $\check{b}b_1$  (рис. 4в), розглядаючи спочатку криволінійний трикутник  $abb_1$ :  $\check{b}b_1 = dz \cdot \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \cdot dz$ , тому що у межах малих пружних деформацій  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ . Розглядаючи потім криволінійний трикутник  $Obb_1$ , виявимо, що величина дуги  $\check{b}b_1$  рівна  $\check{b}b_1 = (\rho + d\rho) \cdot d\varphi$ . Нехтуючи нескінченно малими величинами другого порядку, одержуємо  $\gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi$ , звідки  $\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}$ . Вводячи відносний кут закручування

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (1.5)$$

одержимо рівняння спільності деформацій при крученні:

$$\gamma = \rho \cdot \theta. \quad (1.6)$$

Оскільки в нескінченно малому елементі  $abcd$  виникає напружений стан (рис. 4г), то в межах малих деформацій виконується закон Гука при зсуві:

$$\tau = \gamma \cdot G. \quad (1.7)$$

Підставляючи вираз (1.6) у (1.7), одержимо

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta. \quad (1.8)$$

Остання залежність виражає закон Гука при крученні, на підставі якого можна зробити висновок про те, що дотичні напруження в перерізі змінюються за лінійним законом – пропорційно радіусу  $\rho$ .

Підставляючи залежність (1.8) у рівняння (1.2) і з урахуванням того, що  $G$  і  $\theta$  є постійними величинами, а  $\rho \sin \alpha = y$ , одержимо:

$$\int_A \tau \cdot \sin \alpha dA = \int_A G \cdot \rho \cdot \theta \cdot \sin \alpha dA = G \cdot \theta \cdot \int_A y dA = G \cdot \theta \cdot S_x = 0.$$

Після аналогічної підстановки залежності (1.8) у рівняння (1.3) одержимо:



$$\int_A \tau \cdot \cos \alpha dA = \int_A G \cdot \rho \cdot \theta \cdot \cos \alpha dA = G \cdot \theta \int_A x dA = G \cdot \theta \cdot S_y = 0.$$

З останніх рівнянь випливає, що статичні моменти  $S_x$ ,  $S_y$  площі перерізу щодо осей  $x$ ,  $y$  дорівнюють нулю, оскільки  $G$  і  $\theta$  не дорівнюють нулю.

Статичні моменти площі тільки відносно центральних осей дорівнюють нулю. Таким чином, осі  $x$ ,  $y$  є центральними осями перерізу. Іншими словами, центр кручення збігається з центром ваги перерізу.

Підставляючи залежність (1.8) у рівняння (1.4), і з урахуванням того, що інтеграл  $\int_A \rho^2 dA = I_p$  – полярний момент інерції перерізу, одержимо:

$$M_k - \int_A G \cdot \rho \cdot \theta \cdot \rho dA = M_k - G \cdot \theta \cdot \int_A \rho^2 dA = M_k - G \cdot \theta \cdot I_p = 0,$$

а відносний кут закручування приймає вигляд

$$\theta = \frac{M_k}{GI_p}. \quad (1.9)$$

Величина  $GI_p$  називається жорсткістю стержня при крученні. З виразу (1.8) одержуємо відносний кут закручування  $\theta = \frac{\tau}{G \cdot \rho}$ . Дорівнюючи праві частини останніх виразів, одержуємо формулу для визначення дотичних напружень при крученні стержня круглого чи кільцевого перерізів:

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho. \quad (1.10)$$

З рівняння (1.5) з урахуванням виразу (1.9) одержуємо, що кут закручування дорівнює

$$\varphi = \int_0^\ell \theta dz = \int_0^\ell \frac{M_k dz}{GI_p}.$$

Отримане рівняння є законом Гука при крученні для абсолютного переміщення – кута закручування. Після інтегрування по довжині стержня  $\ell$  одер-

жимо, що в даному випадку абсолютний кут закручування  $\varphi$  стержня можна обчислити за формулою

$$\varphi = \theta \cdot \ell = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_p}. \quad (1.11)$$

### 1.3. Розподіл дотичних напружень при крученні стержня круглого (кільцевого) перерізу. Розрахунок на міцність

З рівняння (1.10) випливає, що дотичні напруження по радіусу перерізу розподіляються лінійно (рис. 5).

Як видно з наведених на рис. 5 епюр дотичних напружень, максимальні дотичні напруження виникають у крайніх точках перерізу, де  $\rho = \rho_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{I_p} \cdot \rho_{\max}. \quad (1.12)$$

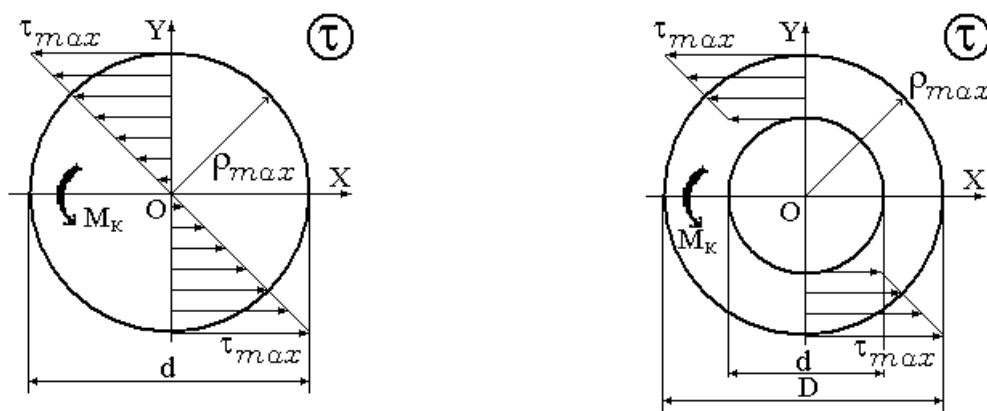


Рисунок 5

З огляду на те, що величина  $\frac{I_p}{\rho_{\max}} = W_p$  є полярним моментом опору перерізу, умова міцності при крученні запишеться у вигляді

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau], \quad (1.13)$$

де  $[\tau]$  – допустиме дотичне напруження, обумовлене відношенням межі текучості матеріалу до коефіцієнта запасу міцності  $n_T$ , тобто:  $[\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}$ .

З умови міцності полярний момент опору повинен бути обраний за формулою  $W_p \geq \frac{M_K}{[\tau]}$ .

Значення полярного моменту опору для вала круглого перерізу:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3.$$

Значення полярного моменту опору для вала кільцевого перерізу:

$$\left(c = \frac{d}{D}\right): W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2 \cdot D^3 \cdot (1 - c^4).$$

Діаметр перерізу для круглого вала обчислюється за формулою

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_K}{0,2 \cdot [\tau]}};$$

для кільцевого вала:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - c^4)}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_K}{0,2 \cdot [\tau] \cdot (1 - c^4)}}.$$

#### 1.4. Розрахунок на жорсткість

Крім розрахунку на міцність вали розраховуються на жорсткість:

$$\theta_{\max} = \frac{M_K}{GI_p} \leq [\theta] \quad (1.14)$$

У деяких випадках умова жорсткості при крученні складається в абсолютних кутах закручування  $\varphi$  ( $[\varphi]$  в радіанах – допустимий абсолютний кут закручування):

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_p} \leq [\varphi]. \quad (1.15)$$

З формули (1.14) полярний момент інерції  $I_p$ , що забезпечує жорсткість, визначається як

$$I_p \geq \frac{M_{\kappa}}{G \cdot [\theta]}.$$

Полярний момент інерції:

для круглого перерізу

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4,$$

для кільцевого

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - c^4).$$

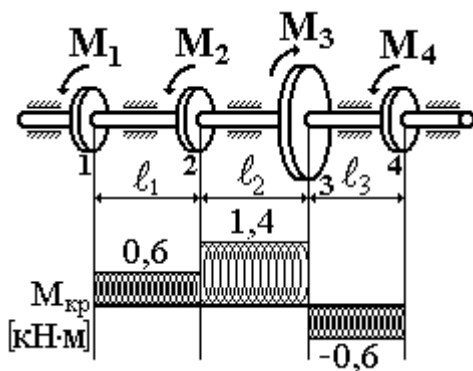
З умови жорсткості діаметр круглого перерізу:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\kappa}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta]}};$$

зовнішній діаметр кільцевого перерізу:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot G \cdot [\theta] \cdot (1 - \alpha^4)}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\kappa}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta] \cdot (1 - \alpha^4)}}.$$

### Приклад 1



З умов міцності та жорсткості визначити діаметр круглого суцільного вала (рис. 6) при таких значеннях моментів, які передаються шківками:

$$M_1 = 0,6 \text{ кНм}; \quad M_2 = 0,8 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 2,0 \text{ кНм}; \quad M_4 = 0,6 \text{ кНм}.$$

Рисунок 6

Допустиме напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$ , допустимий відносний кут закручування  $[\Theta] = 0,25 \text{ град}/\text{м}$ , або  $[\theta] = 0,0044 \text{ м}^{-1}$ .

Модуль пружності сталі при зсуві  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Будуючи епюру крутних моментів, визначаємо, що найбільший момент діє на відрізку 2-3:  $M_{\text{к max}} = M_1 + M_2 = (0,6 + 0,8) = 1,4 \text{ кНм}$ .

Доберемо діаметр вала з умови міцності:

$$d_{\text{міцн.}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{к}}}{\pi \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0,2 \cdot [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{1,4 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 20 \cdot 10^6}} \approx 0,0705 \text{ м.}$$

Тепер доберемо діаметр вала з умови жорсткості:

$$\begin{aligned} d_{\text{жорст.}} &\geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\text{к}}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{\text{к}}}{0,1 \cdot G \cdot [\theta]}} \approx \\ &\approx \sqrt[4]{\frac{1,4 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,0044}} \approx 0,0794 \text{ м.} \end{aligned}$$

Із двох діаметрів слід вибрати більший, знайдений з умови жорсткості та округлити його в більшу сторону до найближчого цілого стандартного. Стандартний діаметр повинен мати останню цифру 0, 2, 5, 8, якщо діаметр обирається в міліметрах. Тому значення діаметра для вала обираємо:

$$d = \max\{d_{\text{міцн.}}; d_{\text{жорст.}}\} = 80 \text{ мм.}$$

При цьому максимальні дотичні напруження будуть на другій ділянці валу:

$$\tau_{\text{max}} = \tau_2 = \frac{M_{\text{кр}2}}{W_{\text{р}}} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 80^3 \cdot 10^{-9}} = 13,67 \text{ МПа} \leq [\tau].$$

## 1.5. Потенційна енергія деформації при крученні

Потенційна енергія деформації  $U$ , накопичена в пружному тілі, чисельно дорівнює роботі  $W$  зовнішніх сил, виконаній у процесі деформування пружно-

го тіла. Розглянемо стержень довжиною  $\ell$ , навантажений крутним моментом  $M$  (рис. 7).

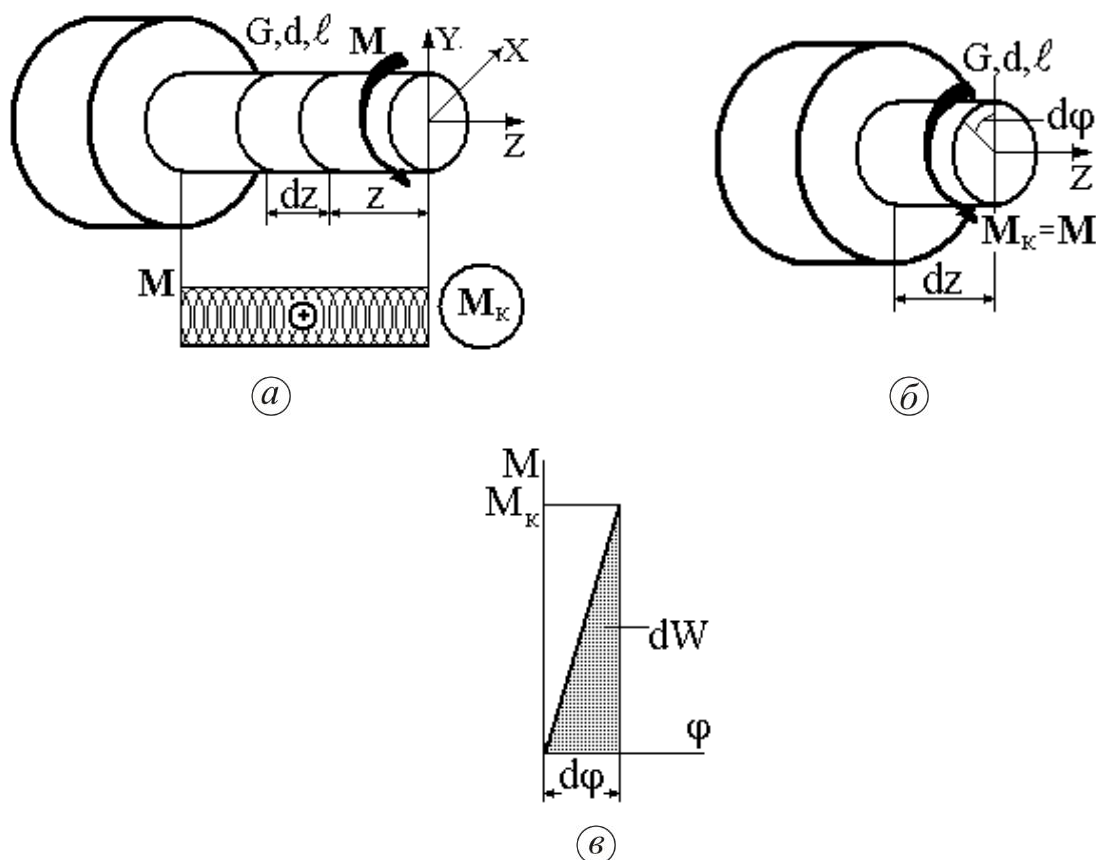


Рисунок 7

Виріжемо елементарний відрізок  $dz$  і розглянемо його деформацію. Умовно закріпимо лівий переріз нескінченно малого елемента вала  $dz$ . При статичному навантаженні моментом  $M_k$  правий переріз елемента повернеться на кут  $d\varphi$  (рис. 7б). Елементарна робота  $dW$  моменту  $M_k$  на куті закручування  $d\varphi$  при навантаженні визначається площею трикутника (рис. 7в), тобто  $dW = \frac{1}{2} \cdot M_k \cdot d\varphi$ . Кут закручування  $d\varphi$  визначається за формулою (1.11) і складе  $d\varphi = \frac{M_k dz}{GI_p}$ . Підставивши значення  $d\varphi$  у вираз для роботи  $dW$ , одержимо

$$dW = \frac{M_k^2 dz}{2GI_p}, \text{ де } I_p - \text{полярний момент інерції при крученні. Але робота } dW$$

чисельно дорівнює потенційній енергії деформації  $dU$ , тобто

$dU = dW = \frac{M_k^2 dz}{2GI_p}$ . Повна потенційна енергія деформації визначається як інтеграл по довжині стержня:

$$U = \int_{\ell} \frac{M_k^2 dz}{2GI_p}. \quad (1.16)$$

Якщо стержень складається з декількох ділянок, потенційна енергія деформації обчислюється як сума інтегралів по ділянках:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{\ell_i} \frac{M_{ik}^2 dz}{2GI_p}. \quad (1.17)$$

## 1.6. Розрахунок гвинтової циліндричної пружини з малим кроком

Розглянемо пружину (рис. 8а) під дією зовнішнього навантаження  $F$ . Основні параметри (рис. 8б):  $D_1$  – внутрішній діаметр пружини (діаметр твірної циліндра, діаметр оправки);  $D$  – середній (розрахунковий) діаметр;  $D_2$  – зовнішній діаметр;  $d$  – діаметр прутка;  $\alpha$  – кут нахилу витка.

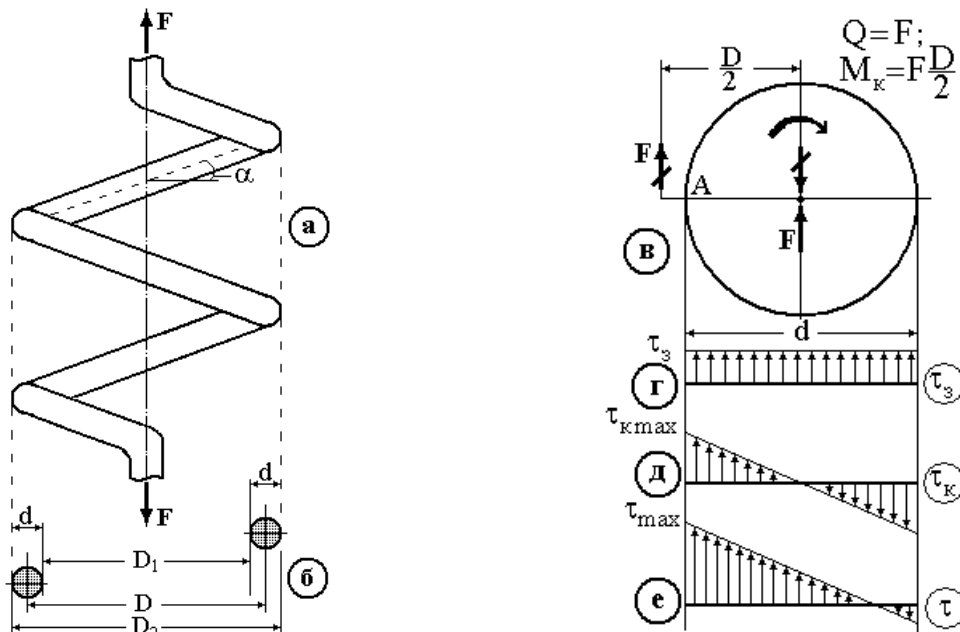


Рисунок 8

Приведемо зовнішню силу  $F$  до центра ваги поперечного перерізу витка. Нехтуючи через малість поздовжньою силою  $N = F \sin \alpha$  і згинальним моментом  $M_3 = F \frac{D}{2} \sin \alpha$ , одержимо (рис. 8в) поперечну силу  $Q = F$  і крутний момент  $M_k = F \cdot \frac{D}{2}$ . Від дії поперечної сили  $Q$  (деформація зсуву, зрізу) у перерізі виникають дотичні напруження  $\tau_3$ , що умовно приймемо рівномірно розподіленими по перерізу (рис. 8г) і рівними  $\tau_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$ . Від дії крутного моменту  $M_k = F \cdot \frac{D}{2}$  також виникають дотичні напруження, що лінійно розподіляються по перерізу (рис. 8д) і мають максимальне значення  $\tau_{k \max}$  у крайніх точках перерізу:

$$\tau_{k \max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{F \cdot \frac{D}{2}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}.$$

З епюр, приведених на рис. 8г,д видно, що дотичні напруження  $\tau_3$  і  $\tau_k$  у точці  $A$  збігаються по напрямку.

Підсумуємо дві епюри (рис. 8г,д) і одержимо, що в пружині найбільш навантажені внутрішні точки (точка  $A$ ), а максимальні напруження:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \tau_{k \max} + \tau_3 = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \\ &= \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \left( 1 + \frac{d}{2 \cdot D} \right) = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot m} \right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

де  $m = \frac{D}{d}$  – індекс пружини. При розрахунку пружин великого діаметра  $D$  з тонкого дроту ( $\frac{d}{2D} \ll 1$ ) максимальні напруження з достатнім ступенем точності можна визначити за формулою



$$\tau_{\max} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}.$$

З урахуванням напружень від поздовжньої сили, згинального моменту та поперечної сили остання формула прийме вигляд

$$\tau_{\max} = k \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}, \quad (1.19)$$

де поправковий коефіцієнт  $k = \frac{4 \cdot m - 1}{4 \cdot m - 4} + \frac{0,615}{m}$ , значення якого в залежності від індексу пружини  $m = D/d$  наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Поправкові коефіцієнти

$m$	3	4	5	6	7	8	9	10
$k$	1,58	1,4	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

При визначенні осадки  $\lambda$  (деформації) гвинтової циліндричної пружини врахуємо лише деформацію від кручення. Деформаціями зсуву, розтягання – стискання та згинання нехтують через їхню малість.

Потенційна енергія деформації пружини при статичному навантаженні чисельно дорівнює роботі зовнішньої сили  $F$  на відповідному переміщенні  $\lambda$ , тобто

$$U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \lambda. \quad (1.20)$$

Обчислимо потенційну енергію деформації при крученні витків пружини, для чого виріжемо нескінченно малий елемент довжиною  $ds$  (рис. 9). Жорстко закріпимо один його кінець, на вільному кінці стержня прикладемо виникаючий крутний момент  $M_k = F \cdot \frac{D}{2}$ .

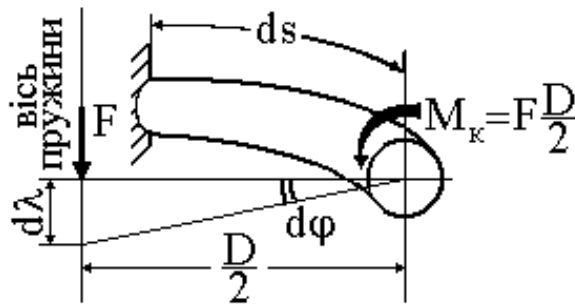


Рисунок 9

Вільний крайній переріз елементарного стержня повернеться на кут  $d\varphi = \frac{M_k dS}{GI_p}$ , а точка прикладення сили  $F$  одержить переміщення  $d\lambda$ . Вважаючи незначним вплив кривизни елементарного стержня, величину потенційної енергії при крученні одного витка пружини стержня обчислимо за формулою (1.17):

$$U_{\text{витка}} = \int_0^{\pi D} \frac{M_k^2}{2 \cdot GI_p} dS = \frac{M_k^2 \cdot \pi \cdot D}{2 \cdot GI_p}.$$

З огляду на те, що крутний момент  $M_k = F \cdot \frac{D}{2}$ , полярний момент інерції  $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ , пружина має  $n$  витків, потенційна енергія при статичному навантаженні пружини силою  $F$  дорівнює

$$U = \frac{4 \cdot F^2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad (1.21)$$

Порівнюючи значення потенційної енергії, що обчислюється за формулами (1.20) та (1.21), залежність для визначення осадки  $\lambda$  набуває вигляду

$$\lambda = \frac{8 \cdot F \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad (1.22)$$

Щоб пружина була більш податливою, діаметр прутка повинний бути найменшим, при цьому максимальні дотичні напруження досягають значних величин. Для виключення цієї невідповідності пружини виготовляються зі спе-

ціальних пружинних матеріалів, що мають високі міцні характеристики. Приведемо значення допустимих дотичних напружень для пружинних матеріалів:

– *високо загартовані пружинні сталі:*

$$[\tau] = 500 \text{ МПа при діаметрі прутка } d = 6 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 400 \text{ МПа при } d = 10 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 380 \text{ МПа при } d = 12 \text{ мм};$$

– *хромонікелеві сталі:*

$$[\tau] = 700 \text{ МПа при } d = 12 \text{ мм};$$

– *фосфористі бронзи:*

$$[\tau] = 130 \text{ МПа при } d = 16 \text{ мм}.$$

## Приклад 2

Гвинтова пружина (рис. 8а,б) виготовлена з дроту  $d = 4 \text{ мм}$ . Внутрішній діаметр пружини  $D_1 = 46 \text{ мм}$ . У напруженому стані зазор на просвіт між витками  $t_1 = 1 \text{ мм}$ ;  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Визначити, яка потрібна сила для стискання пружини, щоб зазору не було.

Середній діаметр пружини –  $D = D_1 + d = 46 + 4 = 50 \text{ мм}$ .

Зазор закривається, якщо осадка пружини одного витка буде дорівнювати йому, тобто

$$\lambda = t_1 = \frac{64 \cdot F \cdot R^3}{G \cdot d^4},$$

звідки:

$$F = \frac{G \cdot d^4 \cdot t_1}{64 \cdot R^3} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot (4 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{64 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^3} = 20,5 \text{ Н}.$$

### Приклад 3

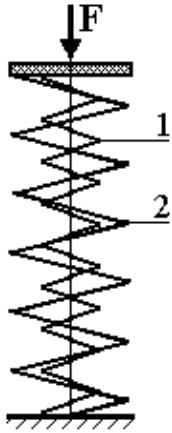


Рисунок 10

Для двох циліндричних гвинтових пружин, осі яких співпадають (рис. 10), навантажених силою  $F = 3,5 \text{ kN}$ , визначити напруження.

Середні діаметри пружин:

$$D_1 = 80 \text{ мм}; \quad D_2 = 160 \text{ мм}.$$

Діаметри прутків:

$$d_1 = 10 \text{ мм}; \quad d_2 = 20 \text{ мм}.$$

Число витків:  $n_1 = 10$ ;  $n_2 = 8$ .

Матеріал двох пружин однаковий:  $G_1 = G_2$ .

Для розрахунку на міцність необхідно визначити зусилля, що діють на кожну пружину окремо.

Позначимо через  $F_1$  та  $F_2$  зусилля, що діють у відповідних пружинах.

Застосувавши рівняння рівноваги маємо:

$$F = F_1 + F_2.$$

У даному випадку пружини мають однакову осадку, тобто переміщення вздовж їхньої осі однакові –  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Згідно з (1.22):

$$\frac{8 \cdot F_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G_1 \cdot d_1^4} = \frac{8 \cdot F_2 \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G_2 \cdot d_2^4}.$$

Враховуючи чисельні дані, отримаємо

$$F_1 = \frac{D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} \cdot \frac{d_1^4}{D_1^3 \cdot n_1} \cdot F_2 = \frac{160^3 \cdot 8 \cdot 10^4}{20^4 \cdot 80^3 \cdot 10} \cdot F_2 = \frac{2}{5} \cdot F_2.$$

Використовуючи рівняння рівноваги, знайдемо

$$F = \frac{2}{5} \cdot F_2 + F_2 = \frac{7}{5} \cdot F_2$$

$$F_1 = \frac{2}{7} \cdot F = 1 \text{ кН}; \quad F_2 = \frac{5}{7} \cdot F = 2,5 \text{ кН}.$$

Відповідно до (1.19) з урахуванням того, що поправкові коефіцієнти  $k_1 = k_2 = 1,18$  для  $m_1 = \frac{D_1}{d_1} = m_2 = \frac{D_2}{d_2} = 8$  (див. табл. 1), дотичні напруження в першій пружині будуть дорівнювати

$$\tau_{1\max} = k_1 \frac{8 \cdot F_1 \cdot D_1}{\pi \cdot d_1^3} = 1,18 \cdot \frac{8 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,08}{\pi \cdot 0,01^3} = 240,4 \text{ МПа},$$

а в другій –

$$\tau_{2\max} = k_2 \frac{8 \cdot F_2 \cdot D_2}{\pi \cdot d_2^3} = 1,18 \cdot \frac{8 \cdot 2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,16}{\pi \cdot 0,02^3} = 150,2 \text{ МПа}.$$

Для високозагартованої пружинної сталі та даних діаметрів прутків  $[\tau] = 350 \div 400 \text{ МПа}$ . Таким чином, умова міцності для обох пружин виконується.

#### Приклад 4

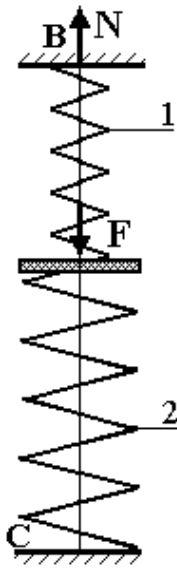


Рисунок 11

Для двох циліндричних, послідовно розташованих гвинтових пружин, осі яких співпадають (рис. 11), навантажених через абсолютно жорсткий диск силою  $F = 3,5 \text{ kN}$ , визначити напруження.

Середні діаметри пружин:

$$D_1 = 80 \text{ мм}; \quad D_2 = 160 \text{ мм}.$$

Діаметри прутків:  $d_1 = 10 \text{ мм}; \quad d_2 = 20 \text{ мм}.$

Число витків:

$$n_1 = 10; \quad n_2 = 8.$$

Матеріал двох пружин однаковий:

$$G_1 = G_2 = G.$$

Для розрахунку на міцність необхідно визначити зусилля, що діють на кожну пружину окремо.

Позначимо через  $F_1$  та  $F_2$  зусилля, що діють у відповідних пружинах. При цьому  $F_1 = N$ ;  $F_2 = N - F$ .

В даному випадку осадка пружин, тобто переміщення вздовж їхньої осі буде дорівнювати –  $\lambda_B = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ . Згідно з (1.22):

$$\lambda_B = \frac{8 \cdot F_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G_1 \cdot d_1^4} + \frac{8 \cdot F_2 \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G_2 \cdot d_2^4} = \frac{N \cdot D_1^3 \cdot n_1}{d_1^4} + \frac{(N - F) \cdot D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} = 0.$$

$$\frac{N \cdot D_1^3 \cdot n_1}{d_1^4} + \frac{N \cdot D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} - \frac{F \cdot D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} = 0.$$

$$N \cdot \left( \frac{D_1^3 \cdot n_1}{d_1^4} + \frac{D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} \right) - F \cdot \frac{D_2^3 \cdot n_2}{d_2^4} = 0.$$

$$N = 0,29F.$$

Враховуючи чисельні дані, отримаємо значення зусиль у пружинах:

$$F_1 = N = 0,29 \cdot F = 1,02 \text{ kN};$$

$$F_2 = N - F = -0,71 \cdot F = -2,48 \text{ kN}.$$

При цьому перша пружина працює на розтягання, а друга на стискання.

Згідно (1.19) з урахуванням того, що поправочні коефіцієнти  $k_1 = k_2 = 1,18$  для  $m_1 = \frac{D_1}{d_1} = m_2 = \frac{D_2}{d_2} = 8$  (див. табл. 1), дотичні напруження в першій пружині будуть дорівнювати:

$$\tau_{1\max} = k_1 \frac{8 \cdot F_1 \cdot D_1}{\pi \cdot d_1^3} = 1,18 \cdot \frac{8 \cdot 1,02 \cdot 10^3 \cdot 0,08}{\pi \cdot 0,01^3} = 245,2 \text{ МПа},$$

а в другій

$$\tau_{2\max} = k_2 \frac{8 \cdot F_2 \cdot D_2}{\pi \cdot d_2^3} = 1,18 \cdot \frac{8 \cdot 2,48 \cdot 10^3 \cdot 0,16}{\pi \cdot 0,02^3} = 151,4 \text{ МПа}.$$

Для високо загартованої пружинної сталі та даних діаметрів прутків  $[\tau] = 350 \div 400 \text{ МПа}$ . Таким чином, умова міцності для обох пружин виконується.

### 1.7. Кручення стержнів некруглого перерізу

При крученні стержнів некруглого перерізу (прямокутних, трикутних, еліптичних, прокатних, тонкостінних і ін.) гіпотеза плоских перерізів не виконується. Поперечні перерізи не залишаються плоскими, окремі точки виходять із площини – перерізи піддаються депланації. При крученні стержня постійного перерізу крутними моментами, прикладеними до вільних його кінців, депланація всіх поперечних перерізів виявляється однаковою. При рівномірній депланації нормальні напруження в поперечних перерізах не виникають. Такий вид кручення називається чистим (вільним) крученням, при якому величини і характер розподілу дотичних напружень в усіх перерізах однаковий.

Розв'язання задачі про чисте кручення некруглих стержнів методами опору матеріалів неможливе. Точні розв'язки задач про кручення стержнів некруглого перерізу отримані в теорії пружності. Остаточні формули для визначення максимальних дотичних напружень  $\tau_{\max}$ , відносного кута закручування

$\theta$  і абсолютного кута закручування  $\varphi$  стержня довжиною  $\ell$  мають такий вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}; \quad (1.23)$$

$$\theta = \frac{M}{GI_{\kappa}}; \quad (1.24)$$

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_{\kappa}}, \quad (1.25)$$

де  $W_{\kappa}$  – момент опору на кручення [ $\text{см}^3$ ,  $\text{м}^3$ ],  $I_{\kappa}$  – момент інерції на кручення [ $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$ ].

### 1.8. Кручення стержнів прямокутного перерізу

Розподіл дотичних напружень  $\tau$  для прямокутного перерізу приведений на рис. 12. Найбільші напруження  $\tau_{\max}$  виникають на серединах довгих сторін перерізу (точки  $A$  і  $B$ ). Дотичні напруження на серединах коротких сторін (точки  $C$ ,  $D$ ) визначаються за формулою  $\tau' = \gamma \cdot \tau_{\max}$ .

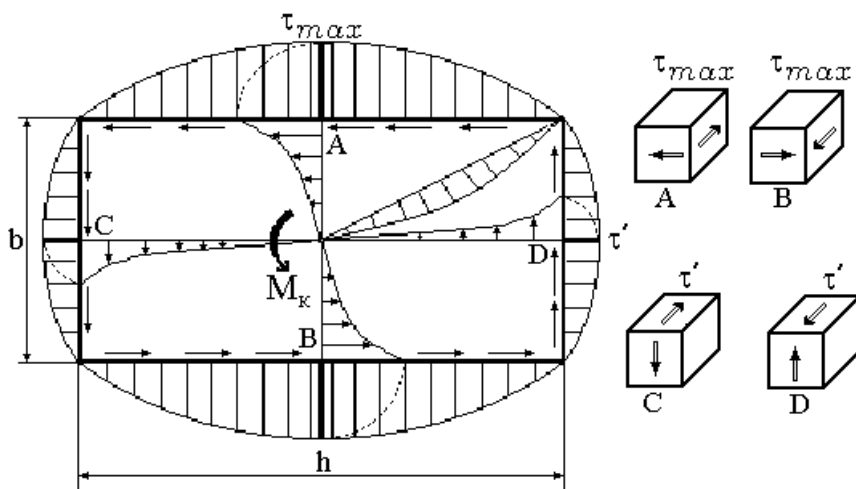


Рисунок 12

Момент опору на кручення  $W_{\kappa}$  і момент інерції на кручення  $I_{\kappa}$  для прямокутного перерізу мають вигляд:

$$\begin{aligned} W_{\kappa} &= \alpha \cdot h \cdot b^2, \\ I_{\kappa} &= \beta \cdot h \cdot b^3. \end{aligned} \quad (1.26)$$



Коефіцієнти  $\alpha, \beta, \gamma$  визначаються в залежності від відношення довгої сторони  $h$  прямокутника до короткої сторони  $b - \left(\frac{h}{b}\right)$  і наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Кручення призматичного стержня поперечного перерізу

(таблиця коефіцієнтів  $\alpha, \beta, \gamma$ )

$\frac{h}{b}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1,00	0,208	0,141	1,000
1,05	0,211	0,147	0,981
1,10	0,214	0,154	0,963
1,15	0,217	0,160	0,946
1,20	0,219	0,166	0,931
1,25	0,221	0,172	0,916
1,30	0,223	0,177	0,903
1,35	0,225	0,182	0,891
1,40	0,227	0,187	0,879
1,45	0,229	0,191	0,869
1,50	0,231	0,196	0,859
1,55	0,233	0,200	0,850
1,60	0,234	0,204	0,842
1,65	0,236	0,207	0,834
1,70	0,237	0,211	0,827
1,75	0,239	0,214	0,821
1,80	0,240	0,217	0,815
1,85	0,242	0,220	0,809
1,90	0,243	0,223	0,804
1,95	0,245	0,226	0,800
2,00	0,246	0,229	0,795
2,50	0,258	0,249	0,766
3,00	0,267	0,263	0,753
4,00	0,282	0,281	0,745
5,00	0,292	0,291	0,743
6,00	0,298	0,298	0,743
7,00	0,303	0,303	0,743
8,00	0,307	0,307	0,743
9,00	0,310	0,310	0,743
10,00	0,313	0,313	0,743
$\infty$	0,333	0,333	0,743

Умова міцності при крученні стержня прямокутного перерізу відповідно до умови (1.23) має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}} \leq [\tau]. \quad (1.27)$$

Умова жорсткості при крученні приймається для відносного кута закручування

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{GI_{\kappa}} \leq [\theta], \quad (1.28)$$

чи для абсолютного кута закручування:

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_{\kappa}} \leq [\varphi]. \quad (1.29)$$

### 1.9. Кручення стержнів довільної форми

При крученні стержнів еліптичного поперечного перерізу максимальні дотичні напруження виникають у крайніх точках, які лежать на малих півосях. У цьому разі

$$W_{\kappa} = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot h}{16},$$

де  $b$  та  $h$  – відповідно розміри малої та великої осей еліпса.

Найбільші напруження в зовнішніх точках перерізу на великих півосях

$$\tau' = \tau_{\max} / m,$$

де  $m = h/b$ .

Умовний момент інерції при крученні стержня еліптичного перерізу

$$I_{\kappa} = \frac{\pi \cdot h \cdot b}{64} (h^2 + b^2).$$

Якщо скручуються стержні складного незамкненого поперечного перерізу, який можна поділити на окремі частини з  $I_{ki}$  та  $W_{ki}$ , то для нього

$$I_K = I_{K1} + I_{K2} + \dots + I_{Kn} = \sum_{i=1}^n I_{ki},$$

де  $i = 1; 2; \dots; n$  – номери найпростіших частин, на які поділено поперечний переріз.

Оскільки кут закручування для всього перерізу і окремих його частин один і той самий:

$$\theta = \frac{M_K}{GI_K} = \frac{M_{ki}}{GI_{ki}} = \dots = \frac{M_{kn}}{GI_{kn}},$$

то крутний момент розподіляється між окремими частинами складного перерізу пропорційно їхнім жорсткостям:

$$M_{K1} = M_K \cdot \frac{I_{K1}}{I_K}; M_{K2} = M_K \cdot \frac{I_{K2}}{I_K}; \dots; M_{Kn} = M_K \cdot \frac{I_{Kn}}{I_K}.$$

Відповідно найбільше дотичне напруження в кожній частині перерізу

$$\tau_{ki} = \frac{M_{ki}}{W_{ki}} = \frac{M_K}{W_{ki}} \left( \frac{I_K}{I_{ki}} \right) = \frac{M_K}{I_K} \left( \frac{I_{ki}}{W_{ki}} \right).$$

Найбільшого значення напруження  $\tau$  досягне для того елемента, в якого відношення  $\frac{I_{ki}}{W_{ki}}$  буде найбільшим:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{I_K} \left( \frac{I_{ki}}{W_{ki}} \right)_{\max} = \frac{M_K}{W_K},$$

$$\text{де } W_K = \frac{I_K}{\left( \frac{I_{ki}}{W_{ki}} \right)_{\max}}.$$

## 1.10. Кручення тонкостінних стержнів

Характерною геометричною рисою тонкостінних стержнів є те, що їхня товщина істотно менше інших лінійних розмірів. Тонкостінним стержнем називається такий, для якого виконується умова  $\frac{b_{\min}}{\delta_{\max}} \geq 10$ , де  $b_{\min}$  – мінімальний поперечний розмір перерізу в плані, а  $\delta_{\max}$  – найбільша товщина контуру профілю (рис. 13а). Серединна лінія профілю – це геометричне місце точок, розташованих на серединах товщин контуру профілю. Якщо серединна лінія являє собою замкнутий контур (рис. 13б), то стержень називається стержнем замкнутого (закритого) профілю (перерізу). Якщо серединна лінія являє собою незамкнутий контур, то стержень називається стержнем відкритого профілю (рис. 13в).

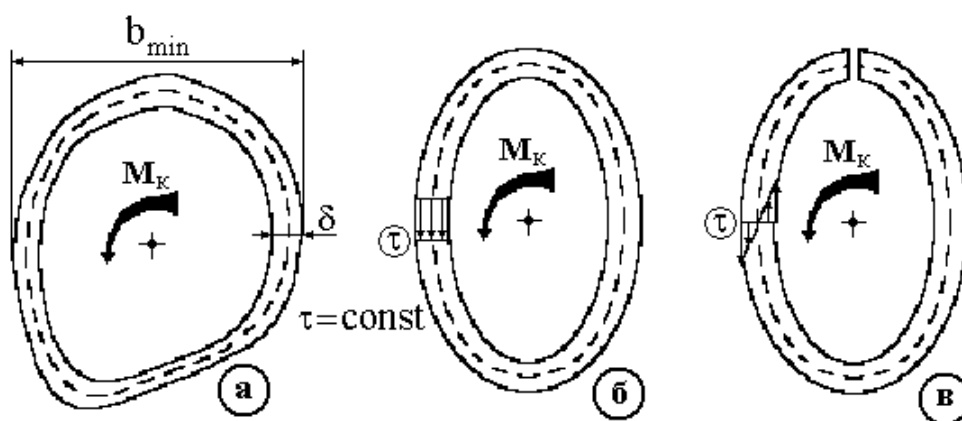


Рисунок 13

### 1.10.1. Кручення стержнів закритого профілю

Наближений розрахунок кручення таких тонкостінних стержнів заснований на гіпотезі Бредта про те, що дотичні напруження в поперечному перерізі розподіляються по товщині стінки рівномірно і спрямовані паралельно дотичній до серединної лінії контуру (рис. 13б). Дотичні напруження в будь-якій точці замкнутого профілю довільної форми з перемінною товщиною стінок визначаються за формулою Бредта:

$$\tau = \frac{M_k}{2 \cdot A^* \cdot \delta}, \quad (1.30)$$

де  $A^*$  – площа, обмежена серединною лінією профілю (рис. 13б).

Найбільше напруження виникає в тому місці контуру, де товщина стінки профілю перерізу є найменшою  $\delta(s) = \delta_{\min}$ . Умова міцності в цьому випадку запишеться у вигляді

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{2 \cdot A^* \cdot \delta_{\min}} \leq [\tau] \quad (1.31)$$

Абсолютний кут закручування стержня довжиною  $\ell$  визначається за формулою

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell}{4 \cdot A^{*2} \cdot G} \cdot \oint_S \frac{dS}{\delta}, \quad (1.32)$$

де  $\oint_S \frac{dS}{\delta}$  – контурний інтеграл, береться по довжині  $S$  серединної лінії контуру профілю. Якщо товщина профілю постійна  $\delta = \text{const}$ , то  $\oint_S \frac{dS}{\delta} = \frac{1}{\delta} \oint_S dS = \frac{S}{\delta}$ , де  $S$  – довжина контуру серединної лінії. Тоді формула для повного кута закручування прийме вигляд:

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell \cdot S}{4 \cdot A^{*2} \cdot \delta \cdot G}. \quad (1.33)$$

### 1.10.1. Кручення стержнів відкритого профілю

При розрахунку стержнів відкритого профілю варто розрізняти прості і складені перерізи. Приклади простих профілів (перерізів) наведені на рис. 14.

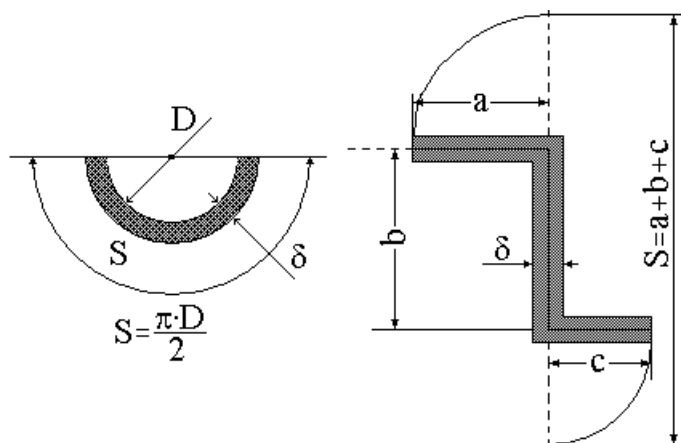


Рисунок 14

Ці профілі характеризуються тим, що можуть бути розгорнуті у витягнутий прямокутник висотою  $S$  і шириною  $\delta$ . Для вузького прямокутного перерізу (рис. 15), коли  $\frac{h}{b} > 10$ , коефіцієнти  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  і моменти опору  $W_K$  та інерції  $I_K$  запишуться як  $W_K = \alpha \cdot h \cdot b^2 = \frac{h \cdot b^2}{3}$ ,  $I_K = \beta \cdot h \cdot b^3 = \frac{h \cdot b^3}{3}$  і формули (1.23)–(1.25) для визначення максимальних дотичних напружень  $\tau_{\max}$ , відносного  $\theta$  і абсолютного  $\varphi$  кутів закручування запишуться у вигляді

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot M_K}{h \cdot b^2}; \quad \theta = \frac{3 \cdot M_K}{h \cdot b^3}; \quad \varphi = \frac{3 \cdot M_K \cdot \ell}{h \cdot b^3}.$$

Епюра розподілу дотичних напружень зображена на рис. 15. По всій довжині  $h$  профілю  $\tau = \tau_{\max}$ , по ширині поперечного перерізу дотичні напруження змінюються за лінійним законом.

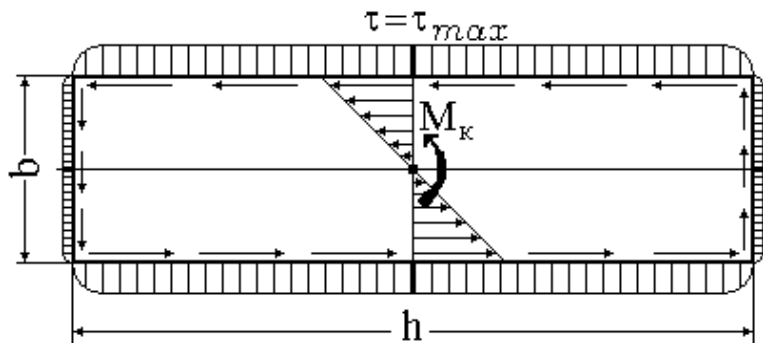


Рисунок 15

Приведеними формулами можна користуватися і для тонкостінних незамкнених профілів з криволінійним контуром постійної товщини  $\delta$ , якщо замість  $h$  підставити довжину  $S$  серединної лінії перерізу, а замість  $b$  – товщину профілю  $\delta$  (рис. 14).

Для складених стержнів відкритого профілю, що складаються з декількох вузьких прямокутників різної товщини (типу швелер, кутник, двотавр) величину моменту інерції  $I_K$  при крученні можна визначити за формулою

$$I_K = \eta \cdot \sum \frac{h_i \cdot \delta_i^3}{3}, \quad (1.34)$$

де коефіцієнт  $\eta$  залежить від форми перерізу (для куткового –  $\eta = 1$ ; двотаврового –  $\eta = 1,2$ ; таврового –  $\eta = 1,15$ ; швелерного –  $\eta = 1,12$ ).

Момент опору при крученні запишеться як:

$$W_K = \frac{I_K}{\delta_{\max}} = \frac{\eta \cdot \sum h_i \cdot b_i^3}{3 \cdot \delta_{\max}},$$

а максимальні дотичні напруження визначаються як

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{3 \cdot M_K \cdot \delta_{\max}}{\eta \cdot \sum h_i \cdot b_i^3}. \quad (1.35)$$

Найбільші напруження в кожному елементі визначаються за формулою

$$\tau_{i \max} = \frac{3 \cdot M_K \cdot \delta_i}{\eta \cdot \sum h_i \cdot b_i^3}.$$

Абсолютний кут закручування  $\varphi$  визначається як

$$\varphi = \frac{M_K \cdot \ell}{GI_K} = \frac{3 \cdot M_K \cdot \ell}{G \cdot \eta \cdot \sum h_i \cdot b_i^3}. \quad (1.36)$$

### Приклад 5

Зіставити величини найбільших дотичних напружень і кутів закручування для сталевих стержнів довжиною  $\ell$ , діаметром  $D = 40$  мм, товщиною стінки  $\delta = 1$  мм для випадків відкритого (рис. 16а) і закритого (рис. 16б) профілів, навантажених однаковими крутними моментами  $M_K$ .

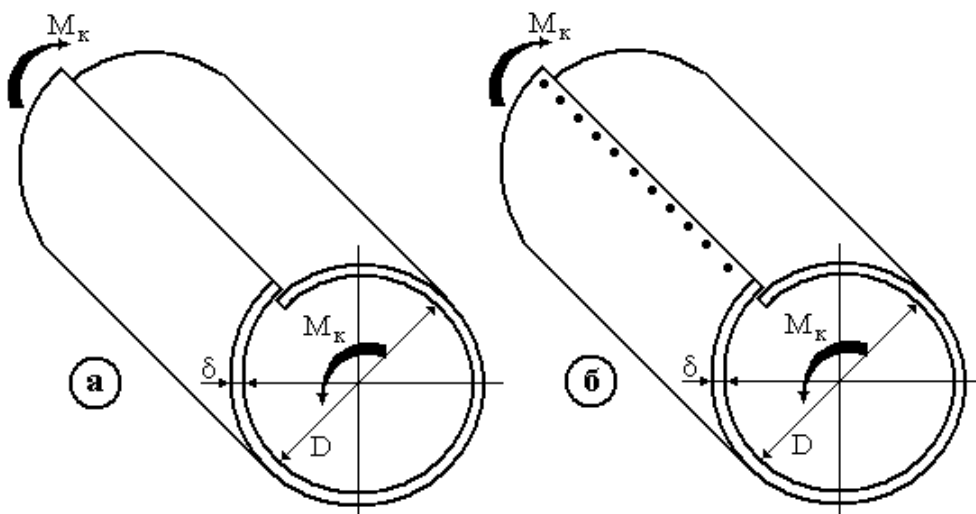


Рисунок 16

**Стержень відкритого профілю (рис. 16а).**

Розгорнемо профіль у витягнутий прямокутник зі сторонами:

$$\begin{aligned}b &= \delta, \\h &= S = \pi \cdot D.\end{aligned}$$

Максимальні дотичні напруження обчислимо за формулою

$$\tau_{1 \max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}.$$

Момент опору на кручення:

$$W_{\kappa} = \frac{h \cdot b^2}{3} = \frac{S \cdot \delta^2}{3} = \frac{\pi \cdot D \cdot \delta^2}{3}.$$

Тоді максимальні дотичні напруження виявляються рівними

$$\tau_{1 \max} = \frac{3 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot D \cdot \delta^2}.$$

Абсолютний кут закручування обчислимо за формулою

$$\varphi_1 = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell}{GI_{\kappa}}.$$

Момент інерції на кручення:

$$I_{\kappa} = \frac{h \cdot b^3}{3} = \frac{S \cdot \delta^3}{3} = \frac{\pi \cdot D \cdot \delta^3}{3}.$$

У цьому випадку кут закручування дорівнює

$$\varphi_1 = \frac{3 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot D \cdot \delta^3}.$$

**Стержень закритого профілю (рис. 16б).**

Максимальні дотичні напруження обчислимо за формулою Бредта:



$$\tau_{2 \max} = \frac{M_{\kappa}}{2 \cdot A^* \cdot \delta} = \frac{M_{\kappa}}{2 \cdot \delta \frac{\pi \cdot D^2}{4}},$$

де  $A^* = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$ , і одержимо

$$\tau_{2 \max} = \frac{2 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot D^2 \cdot \delta}.$$

Кут закручування обчислимо за формулою

$$\varphi_2 = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell}{4 \cdot A^{*2} \cdot G} \oint \frac{dS}{\delta} = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell \cdot S}{4 \cdot A^{*2} \cdot G \cdot \delta}.$$

Після перетворень одержимо:

$$\varphi_2 = \frac{M_{\kappa} \cdot \ell \cdot \pi \cdot D}{4 \left( \frac{\pi \cdot D^2}{4} \right)^2 G \cdot \delta} = \frac{4 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot D^3 \cdot \delta}.$$

Відношення напружень:

$$\frac{\tau_{1 \max}}{\tau_{2 \max}} = \frac{3 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot D \cdot \delta^2} \cdot \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \delta}{2 \cdot M_{\kappa}} = \frac{3}{2} \left( \frac{D}{\delta} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{40}{1} = 60.$$

Відношення кутів закручування:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{3 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot D \cdot \delta^3} \cdot \frac{G \cdot \pi \cdot D^3 \cdot \delta}{4 \cdot M_{\kappa} \cdot \ell} = \frac{3}{4} \left( \frac{D}{\delta} \right)^2 = \frac{3}{4} \left( \frac{40}{1} \right)^2 = 1200.$$

Отже, стержень замкнутого профілю виявляється істотно більш міцним та в ще більшому ступені жорстким, чим такий же незамкнутий.

### 1.11. Статично невизначувані системи при крученні

Статично невизначуваною називається кінематично незмінна система, у якій число невідомих зусиль, включаючи реакції опор і внутрішні силові факто-

ри (крутні моменти), більше числа рівнянь статички, які можна скласти для даної задачі.

Ступінь статичної невизначеності показує, скільки рівнянь спільності переміщень у геометричному аналізі деформування необхідно скласти, щоб можна було розв'язати задачу. План розв'язання задачі такий же, як і для статично невизначуваних систем при розтяганні–стисканні.

Отже розв'язання статично невизначених задач розглянемо на прикладах.

### 1.11.1. Розкриття статичної невизначуваності при послідовному з'єднанні ділянок стержня

Розкрити статичну невизначеність вала (рис. 17), побудувати епюру крутних моментів та визначити розміри поперечного перерізу стержня, якщо допустиме дотичне напруження  $[\tau]$ .

**Статична сторона задачі.**

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_z = M_C + M_B - M_1 + M_2 = M_C + M_B + 3M = 0. \quad (1.37)$$

**Геометрична сторона задачі**

Для розкриття статичної невизначуваності необхідно скласти одне рівняння спільності переміщень.

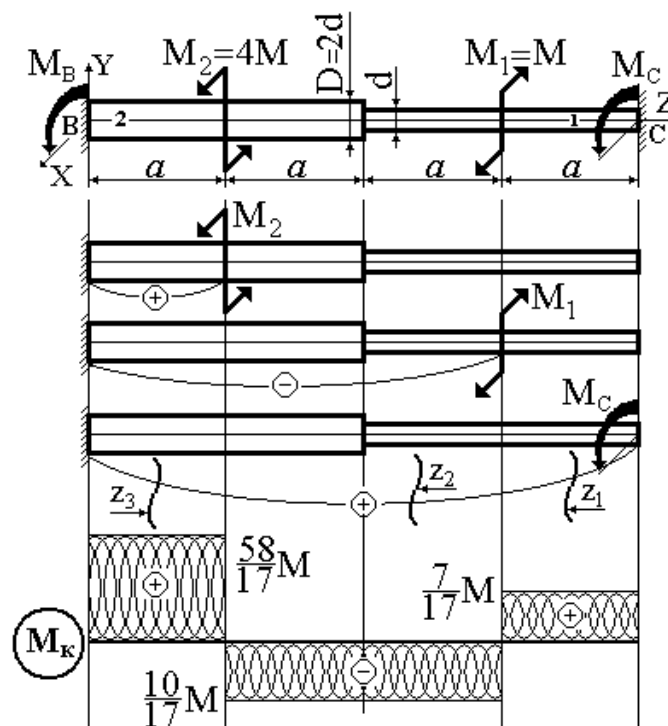


Рисунок 17

Відкинемо праве затиснення і його дію замінимо моментом  $M_C$ . Цей момент визначається з умови, що поворот правого торцевого перерізу щодо лівого дорівнює нулю:

$$\varphi_{BC} = \varphi_{M_C} + \varphi_{M_1} + \varphi_{M_2} = 0. \quad (1.38)$$

### **Фізична сторона задачі**

Скористаємося законом Гука при крученні для кутів закручування:

$$\begin{aligned} \varphi_{M_C} &= \frac{M_C \cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{M_C \cdot 2a}{GI_{p2}}, \\ \varphi_{M_1} &= -\frac{M_1 \cdot a}{GI_{p1}} - \frac{M_1 \cdot 2a}{GI_{p2}}, \\ \varphi_{M_2} &= \frac{M_2 \cdot a}{GI_{p2}}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

**Спільне розв'язання рівнянь.** Підставимо (1.39) в (1.38):

$$\varphi_{AB} = \frac{M_A \cdot 2a}{GI_{p1}} + \frac{M_A \cdot 2a}{GI_{p2}} - \frac{M_1 \cdot a}{GI_{p1}} - \frac{M_1 \cdot 2a}{GI_{p2}} + \frac{M_2 \cdot a}{GI_{p2}} = 0. \quad (1.40)$$

З урахуванням того, що  $M_2 = 4M$ ,

$I_{p1} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ ,  $I_{p2} = 16 \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 16 \cdot I_{p1}$ , та виконавши відповідні перетворення, одержимо

$$M_A \left( 2 + \frac{2}{16} \right) - M - \frac{2M}{16} + \frac{4M}{16} = 0,$$

звідки  $M_A = \frac{7}{17}M$ .

$$3 (1.37): M_B = -3M - M_A = -M \left( 3 + \frac{7}{17} \right) = -\frac{58}{17}M.$$

**Побудова епюри крутних моментів.** За ділянками, показаними на рис. 17, обчислюємо значення крутного моменту:

$$M_{\kappa}(z_1) = M_A = \frac{7}{17}M;$$

$$M_{\kappa}(z_2) = M_A - M_1 = -\frac{10}{17}M;$$

$$M_{\kappa}(z_3) = M_B = \frac{58}{17}M.$$

Перевіряємо правильність розв'язання задачі, для чого обчислимо кут повороту  $\varphi_{AB}$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{AB} &= \frac{7M \cdot a}{17GI_{p1}} - \frac{10M \cdot a}{17GI_{p1}} - \frac{10M \cdot a}{17G \cdot 16I_{p1}} + \frac{58M \cdot a}{17G \cdot 16I_{p1}} = \\ &= \frac{M \cdot a}{17G \cdot 16I_{p1}}(112 - 160 - 10 + 58) = \frac{M \cdot a}{17G \cdot 16I_{p1}}(170 - 170) \equiv 0.\end{aligned}$$

**Визначення розмірів поперечного перерізу.** Попередньо визначимо, на якій ділянці вала виникають найбільші напруження.

Полярні моменти опору окремих ділянок вала:

$$W_{p1} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \quad W_{p2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = 8 \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 8 \cdot W_{p1}.$$

Одержимо наступне:

$$\text{перша ділянка діаметром } d - \tau_{\max} = \frac{7M}{17W_{p1}};$$

$$\text{друга ділянка діаметром } d - \tau_{\max} = \frac{10M}{17W_{p1}};$$

$$\text{третя ділянка діаметром } D - \tau_{\max} = \frac{10M}{17W_{p2}} = \frac{10M}{17 \cdot 8W_{p1}} = \frac{1,25M}{17W_{p1}};$$

$$\text{четверта ділянка діаметром } D - \tau_{\max} = \frac{58M}{17W_{p2}} = \frac{7,25M}{17W_{p1}}.$$

Таким чином, найбільш навантажений стержень на другій ділянці діаметром  $d$ .

$$\text{З умови міцності } \tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_{\kappa}}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau], \text{ одержимо}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16\left(\frac{10}{17}M\right)}{\pi[\tau]}}.$$

### 1.11.2. Розкриття статичної невизначуваності при паралельному з'єднанні ділянок стержня

Сталевий стержень 1 квадратного перерізу ( $b = 2,5$  см) і алюмінієва трубка 2 ( $D = 4,6$  см,  $d = 4,0$  см) з'єднані жорстким диском, до якого прикладений момент  $M = 0,4$  кН·м (рис. 18). Модуль зсуву сталі  $G_1 = 0,8 \cdot 10^5$  МПа, алюмінію  $G_2 = 0,27 \cdot 10^5$  МПа.

Визначити максимальні дотичні напруження в перерізах сталевого й алюмінієвого стержнів та кут повороту перерізу  $A$ .

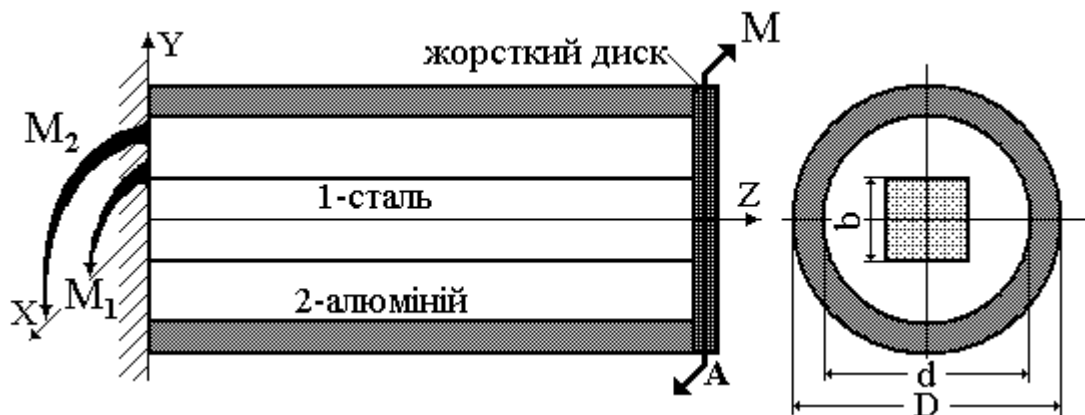


Рисунок 18

#### Статична сторона задачі

Зовнішній момент  $M$  розподіляється на два стержні, і рівняння статички прийме вид:

$$\sum M_z = M_1 + M_2 - M = 0, \text{ або } M_1 + M_2 = M. \quad (1.41)$$

**Геометрична сторона задачі.** Оскільки диск, що скріплює алюмінієву трубку і сталевий стержень, є абсолютно жорстким тілом, то кут повороту перерізу  $A$  для обох стержнів однаковий. Рівняння спільності переміщень:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (1.42)$$

**Фізична сторона задачі.** За законом Гука при крученні:  $\varphi = \frac{M_{\kappa} \ell}{GI_{\text{p},\kappa}}$ , одер-

жимо:

$$\frac{M_1 \ell}{G_1 I_{\kappa}} = \frac{M_2 \ell}{G_2 I_{\text{p}}},$$

звідки

$$M_1 = M_2 \frac{G_1 I_{\kappa}}{G_2 I_{\text{p}}}. \quad (1.43)$$

Обчислюємо полярний момент інерції для кільцевого перерізу алюмінієвої трубки:

$$I_{\text{p}} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot 4,6^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{4}{4,6} \right)^4 \right] = 19 \text{ см}^4.$$

Момент інерції при крученні для сталевого стержня квадратного перерізу дорівнює

$$I_{\kappa} = \beta \cdot b^4 = 0,141 \cdot 2,5^4 = 5,5 \text{ см}^4,$$

де  $\beta = 0,141$  при відношенні  $\frac{h}{b} = 1$ .

Підставивши в рівняння (1.43) значення  $G_1, G_2, I_{\text{p}}, I_{\kappa}$ , одержимо:

$$M_1 = 0,86 \cdot M_2. \quad (1.44)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (1.44) та (1.41), одержимо значення моментів, діючих в перерізах трубки і стержня:

$$M_2 = 0,215 \text{ кНм},$$

$$M_1 = 0,185 \text{ кНм}.$$

Обчислюємо полярний момент опору для стержня кільцевого перерізу:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 4,6^3}{16} \left( 1 - \left( \frac{4}{4,6} \right)^4 \right) = 8,26 \text{ см}^3$$

і полярний момент опору для стержня квадратного перерізу:

$$W_k = \alpha b^3 = 0,208 \cdot 2,5^3 = 3,27 \text{ см}^3$$

( $\alpha = 0,208$  при відношенні  $\frac{h}{b} = 1$ ).

Визначаємо максимальні дотичні напруження:

– у сталевому стержні:

$$\tau_{1\max} = \frac{M_1}{W_k} = \frac{0,185 \cdot 10^3}{3,27 \cdot 10^{-6}} = 56,5 \text{ МПа};$$

– в алюмінієвому стержні:

$$\tau_{2\max} = \frac{M_2}{W_p} = \frac{0,215 \cdot 10^3}{8,26 \cdot 10^{-6}} = 26 \text{ МПа}.$$

**Перевіряємо правильність розв'язання задачі.** Кут повороту диска (переріз  $A$ ) дорівнює куту повороту крайнього правого перерізу квадратного сталевго стержня і кільцевого алюмінієвого стержня:

$$\begin{aligned} \varphi_A = \varphi_1 = \varphi_2 &= \frac{0,185 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 5,5 \cdot 10^{-8}} = \\ &= \frac{0,215 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2,7 \cdot 10^{10} \cdot 19 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 1,68 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = \frac{1,68 \cdot 10^{-2} \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,96^\circ. \end{aligned}$$

## 2. Розрахунково-проектувальне завдання

Мета вивчення розділу „Кручення” в курсі „Опір матеріалів” – навчитися основам інженерного розрахунку елементів конструкцій машин і механізмів на міцність і жорсткість при навантаженні, що діє в площині поперечного перерізу (крутного моменту) з урахуванням при цьому умов роботи, властивостей матеріалів та різноманітних типів поперечних перерізів.

Для кращої організації і більш ефективної самостійної роботи студентів, згідно з вимогами програми курсу „Опір матеріалів”, студентам пропонується до виконання розрахунково–проектувальне завдання (РПЗ) по темі „Розрахунки стержнів при крученні”. Виконуючи цю роботу, потрібно практично ознайомитись з методами обчислення крутних моментів, побудовою епюр моментів та напружень, визначенням розмірів та форми поперечного перерізу для різноманітних схем, що забезпечують умови міцності та жорсткості.

### 2.1. Склад розрахунково-проектувального завдання

**Розрахунково-проектувальне завдання складається з трьох етапів:**

1. Розв’язання запропонованих викладачем задач для певних варіантів розрахункових схем і вихідних даних, оформлення їх згідно з вимогами кафедри „Опору матеріалів”.
2. Написання контрольних робіт за темою РПЗ.
3. Захист РПЗ. Захист включає в себе пояснення методів і принципів розв’язання задач і відповідь на контрольні теоретичні запитання. Кількість та обсяг цих запитань визначається викладачем індивідуально для кожного студента.

**Мета роботи** – розкриття статичної невизначуваності запропонованих розрахункових схем, визначення внутрішніх силових факторів на окремих ділянках стержнів, побудування епюр, проведення проектувального розрахунку для визначення розмірів поперечного перерізу, що забезпечують заданий коефіцієнт запасу міцності.

**Дано:**

1. Схема заданої системи із зазначенням довжин ділянок і зовнішнього навантаження.
2. Форма і співвідношення розмірів поперечного перерізу.
3. Допустиме дотичне напруження  $[\tau]$ , допустимий відносний кут закручування  $[\theta]$ , модуль зсуву матеріалу  $G$ .



**РПЗ складається з трьох обов'язкових для розв'язання задач:**

1. Визначити раціональне розташування шківів і з умов міцності та жорсткості обрати розміри поперечних перерізів (діаметр круглого і кільцевого валів) для статично визначуваної системи. Порівняти їхні ваги. Варіанти розрахункових схем наведені в додатку 1, а чисельні дані – в таблиці Д.1.
2. Для заданої статично невизначуваної системи з послідовним розташуванням ділянок валу з розрахунку на міцність визначити розміри поперечних перерізів на всіх ділянках вала і побудувати епюру кутів закручування, порівнявши їх значення з допустимим значенням кута закручування. В разі потреби відшукати розміри поперечних перерізів вала з умови жорсткості. Варіанти розрахункових схем наведені в додатку 2, а чисельні дані – в таблиці Д.2.
3. Для заданої статично невизначуваної системи з паралельним розташуванням ділянок валу з розрахунку на міцність визначити допустимі значення крутних моментів. Побудувати епюру розподілу кутів закручування. Варіанти розрахункових схем наведені в додатку 3, а чисельні дані – в таблиці Д.3.

## **2.2. Порядок виконання завдання**

*Задача 1. Для статично визначуваного вала, навантаженого крутними моментами з умови міцності та жорсткості, визначити розміри поперечного перерізу.*

1. Виписати для заданого варіанта чисельні дані. В певному масштабі накреслити схему заданої системи з зазначенням її лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.
2. Визначити значення крутних моментів на шківках.
3. Побудувати для заданої схеми епюру крутних моментів.
4. Визначити діаметр суцільного круглого вала з умови міцності.
5. Розташувати шківки раціонально і для цього випадку побудувати епюру крутних моментів.
6. Визначити розміри поперечного перерізу (діаметри суцільного і трубчастого валів) для раціонального розташування шківів з умов міцності та жорсткості. Обрати більший діаметр.

7. Обчислити дотичні напруження на різних відрізках вала згідно зі значеннями епюри крутних моментів і побудувати епюру дотичних напружень для суцільного вала.
8. Порівняти ваги суцільного вала для заданої системи і суцільного вала для раціонального розташування шківів. Також порівняти ваги суцільного і трубчастого валів для раціонального розташування шківів.
9. Побудувати епюру кутів закручування раціонального суцільного вала, миттєво зупинивши один зі шківів вала.
10. Побудувати епюри дотичних напружень у поперечному перерізі суцільного і трубчастого валів.

***Задача 2. Для статично невизначуваної системи при крученні (послідовне розташування ділянок вала) з умови міцності та жорсткості визначити розміри поперечного перерізу.***

***Задача 3. Для статично невизначуваної системи при крученні (паралельне розташування ділянок вала) за умов міцності та жорсткості визначити значення зовнішнього крутного моменту.***

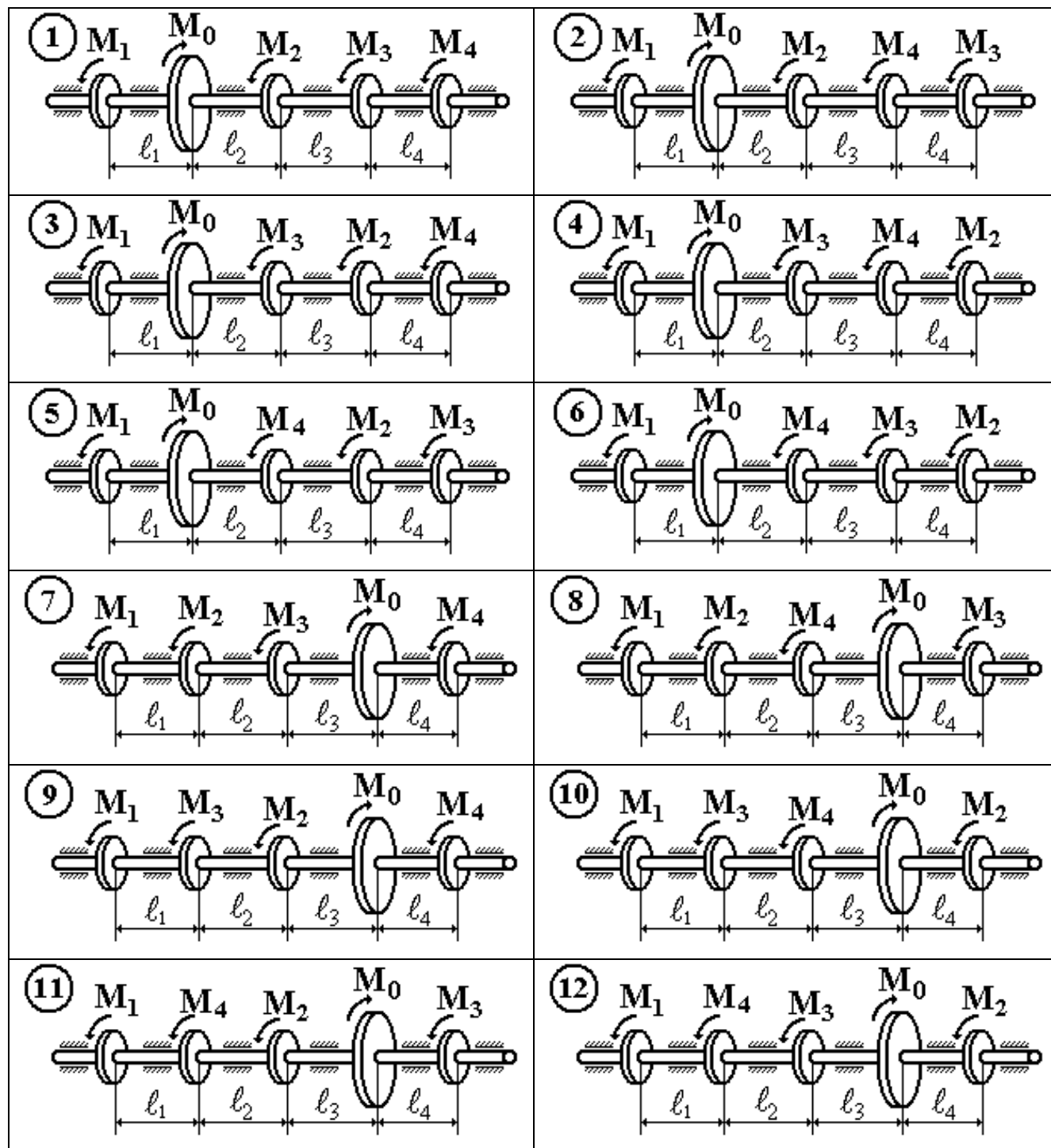
1. Для заданого варіанта завдання виписати чисельні дані і в певному масштабі накреслити схему заданої системи з зазначенням лінійних розмірів і зовнішніх навантажень.
2. Встановити ступінь статичної невизначуваності системи.
3. Визначити геометричні характеристики поперечних перерізів суцільного, трубчастого та прямокутного валів через значення параметра  $d$  – діаметра суцільного вала.
4. *Статичний аспект задачі.* Скласти і записати рівняння статички. Вибрати основну статично визначувану систему, уявно відкинувши одну з опор і замінивши її дію на крутний момент. Розкрити статичну невизначуваність системи.
5. *Геометричний аспект задачі.* Розглянути сумісне деформування основної системи. Записати рівняння сумісності переміщень: кутів закручування. Для задачі 2 кут повороту перерізу на опорі  $B$  відносно перерізу на опорі  $C$  дорівнює нулю. Для задачі 3 кут закручування в перерізі  $B$  на валу і на трубці однаковий.

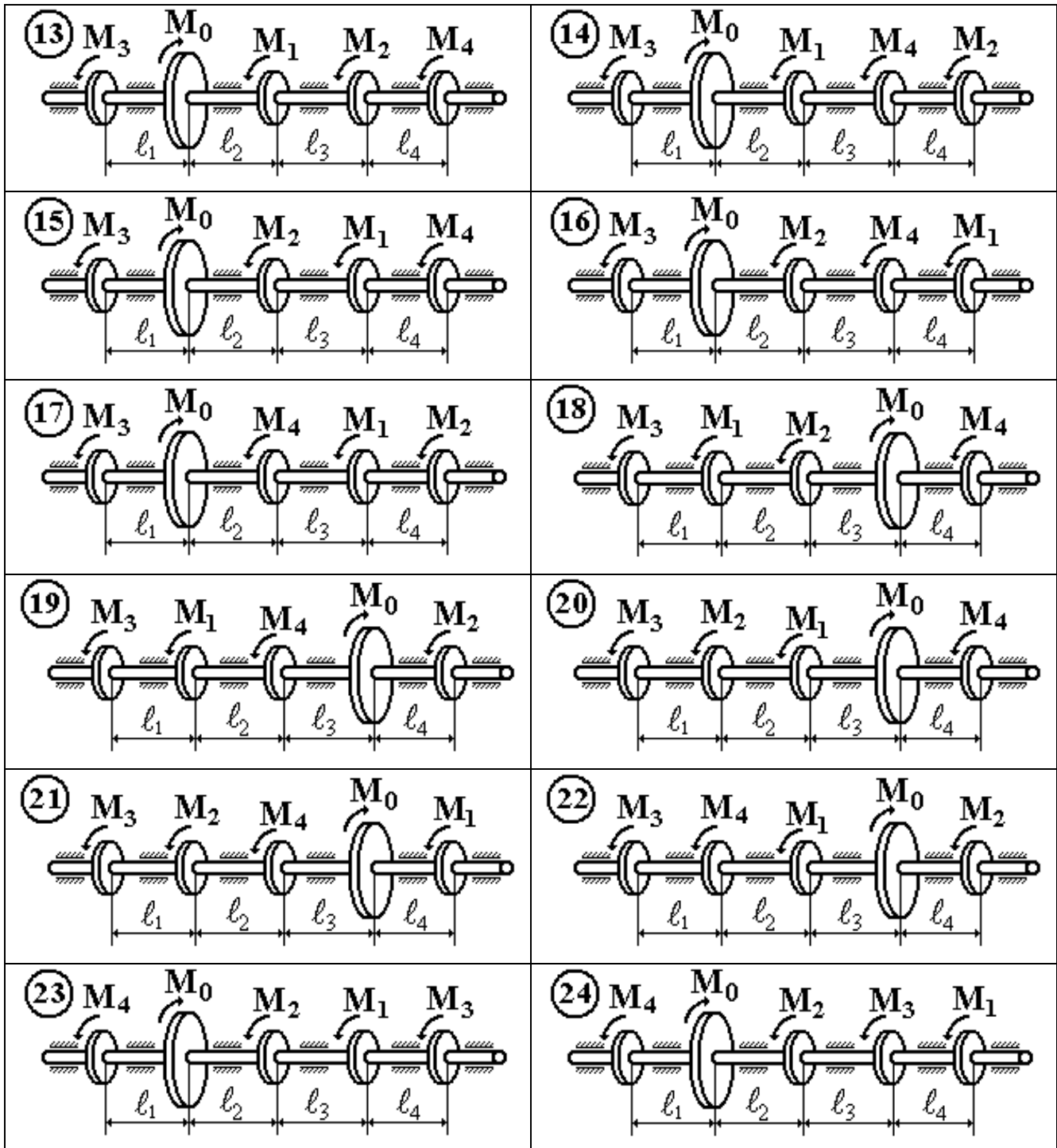
6. *Фізичний аспект задачі.* Використовуємо закон Гука для запису виразів для кутів закручування.
7. Побудувати епюру крутних моментів.
8. З умови міцності визначити розміри поперечного перерізу в задачі 2 або допустиме значення крутного моменту в задачі 3.
9. Побудувати епюри дотичних напружень для різних відрізків схеми.
10. Побудувати епюру кутів закручування і зробити перевірку умови жорсткості.

## 2.3. Розрахункові схеми та чисельні дані

Додаток 1.

### Задача 1. Статично визначуваний вал





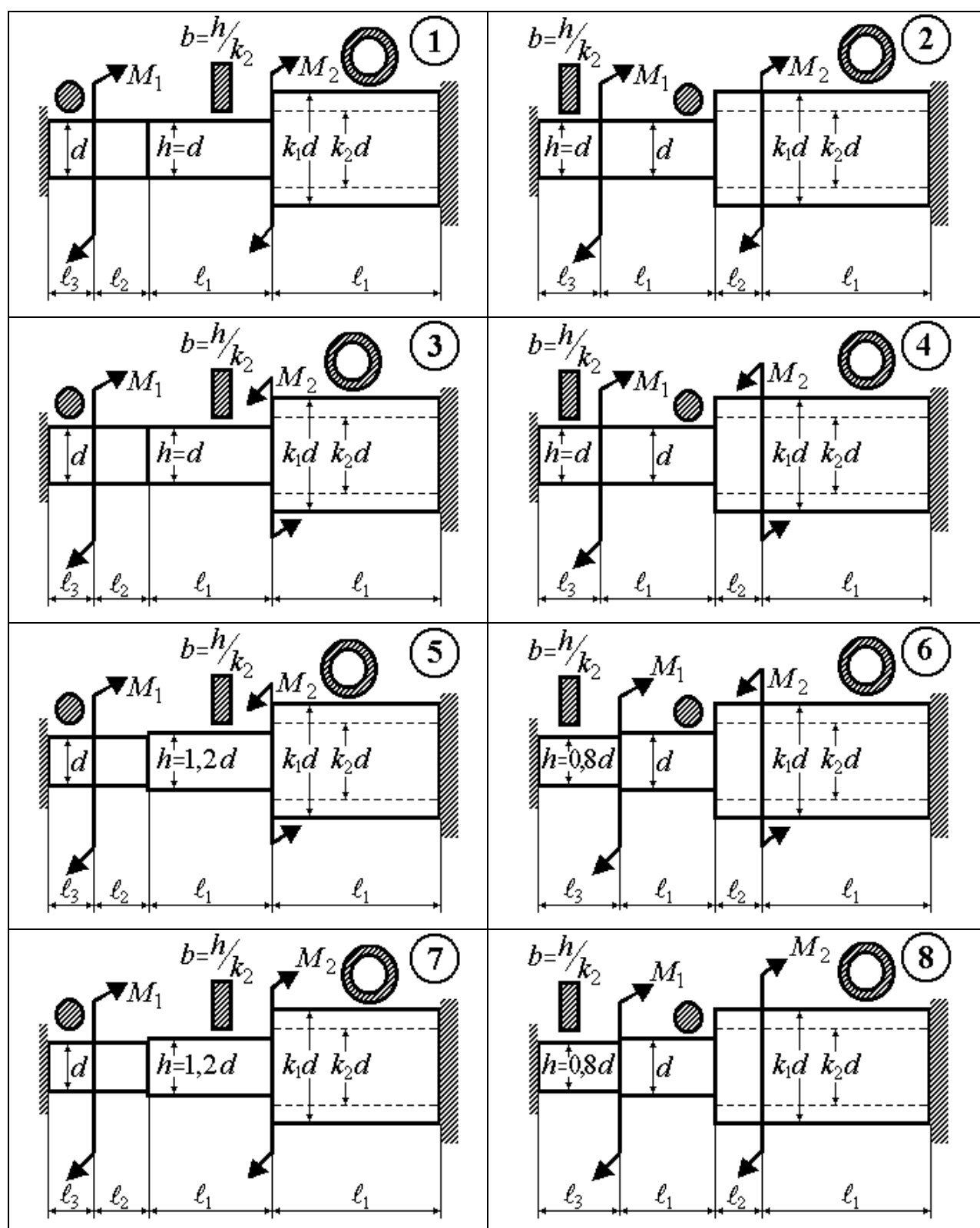
Таблиця Д.1

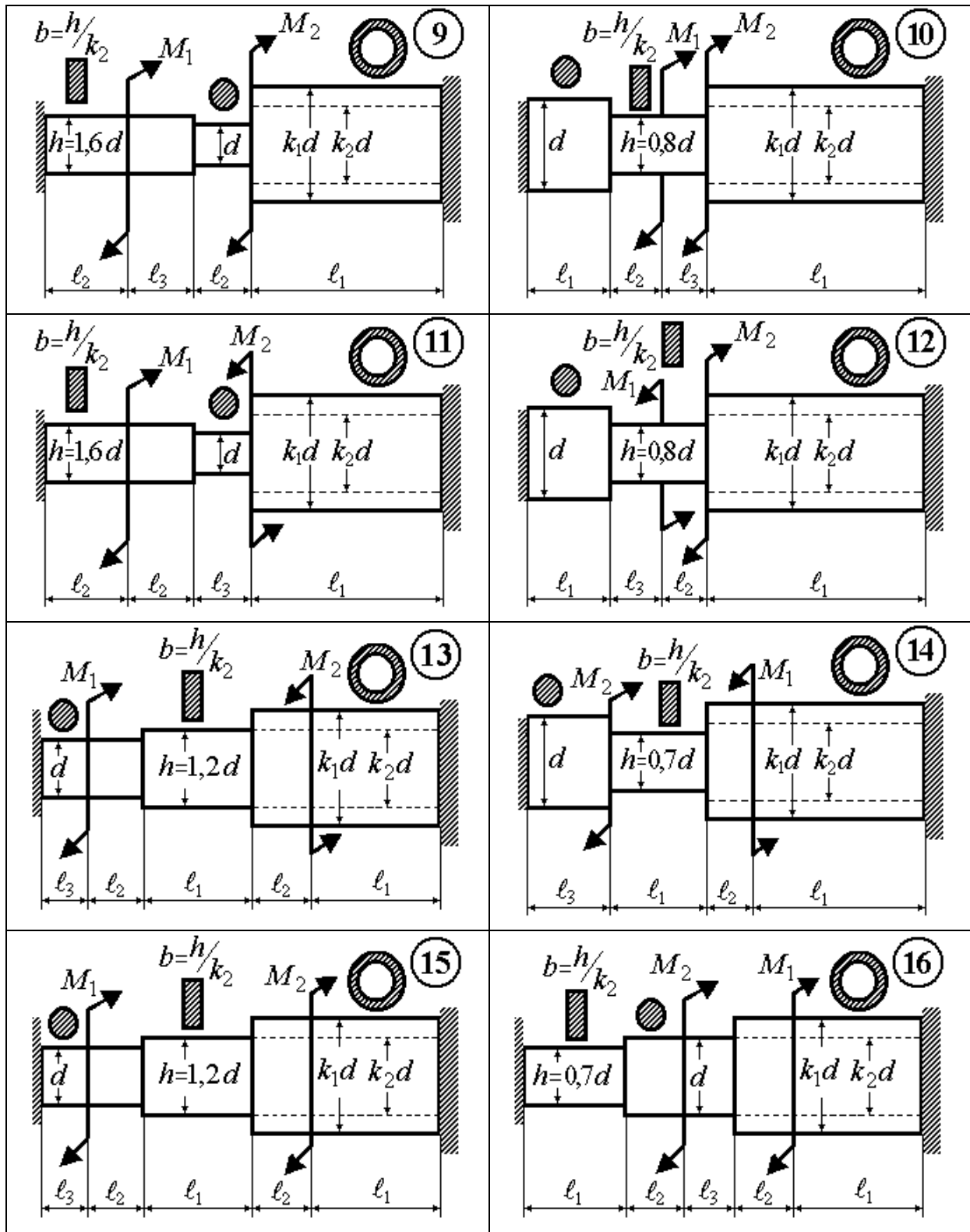
## Вхідні дані до задачі 1

№ вар.	$N_1$ , кВт	$N_2$ , кВт	$N_3$ , кВт	$N_4$ , кВт	$\ell_1$ , м	$\ell_2$ , м	$\ell_3$ , м	$\ell_4$ , м	$n$ , об./хв.	$[\tau]$ , МПа	$[\theta]$ , град/м
1	2,0	3,5	2,8	2,2	0,5	0,2	0,6	0,2	238	28	2,0
2	2,5	3,2	3,0	2,8	0,1	0,4	0,4	0,6	286	32	1,8
3	2,8	3,0	3,5	2,2	0,3	0,6	0,8	0,4	334	40	1,9
4	3,0	2,8	2,2	3,5	0,5	0,5	0,6	0,4	382	35	1,7
5	3,2	2,5	2,5	2,8	0,1	0,3	0,4	0,2	248	32	2,1
6	3,5	2,0	2,5	3,0	0,2	0,4	0,5	0,1	267	40	2,2
7	4,0	2,2	3,8	2,5	0,5	0,2	0,4	0,1	382	32	2,0
8	2,5	3,8	2,2	4,0	0,4	0,3	0,5	0,2	477	40	2,2
9	2,8	2,6	3,4	3,2	0,3	0,6	0,2	0,4	382	45	2,0
10	3,5	3,4	2,6	2,2	0,4	0,5	0,1	0,2	430	32	1,8
11	3,4	2,6	3,5	2,5	0,2	0,3	0,5	0,5	450	40	2,2
12	2,5	2,2	3,8	4,2	0,5	0,1	0,2	0,6	477	35	2,1
13	3,5	4,0	2,0	2,5	0,6	0,2	0,3	0,5	572	45	2,0
14	4,0	3,5	2,2	2,8	0,4	0,2	0,3	0,1	667	32	1,9
15	4,2	3,8	2,5	2,5	0,1	0,3	0,2	0,4	765	40	2,1
16	3,8	3,2	2,4	2,6	0,2	0,5	0,4	0,1	572	35	2,0
17	3,2	2,8	3,5	2,5	0,5	0,2	0,3	0,6	382	32	2,2
18	2,5	3,5	3,2	2,8	0,6	0,3	0,4	0,5	286	40	1,8
19	3,5	3,5	4,2	2,8	0,4	0,2	0,3	0,5	248	45	1,8
20	2,5	4,0	2,0	3,5	0,5	0,6	0,2	0,3	430	50	2,0
21	3,0	2,8	3,2	2,0	0,1	0,3	0,6	0,2	382	40	2,2
22	2,5	3,5	4,0	2,0	0,3	0,2	0,5	0,5	477	35	2,0
23	2,0	3,0	3,0	4,0	0,5	0,5	0,3	0,2	450	40	1,8
24	2,5	3,0	2,8	3,2	0,4	0,5	0,3	0,2	475	45	2,0

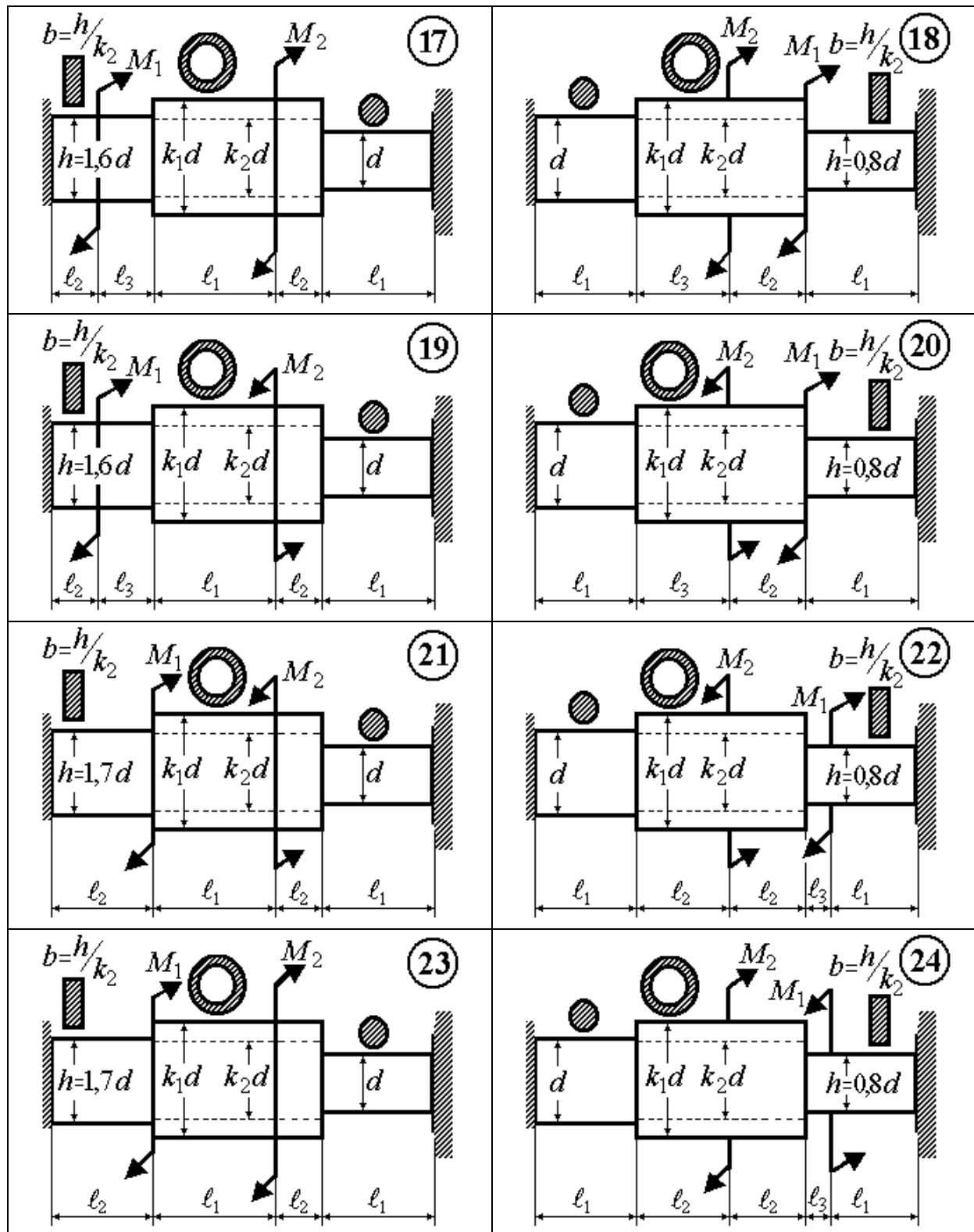
Примітка. Модуль зсуву матеріалу стержня –  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа

## Задача 2. Статично невизначуваний вал (послідовне розташування)







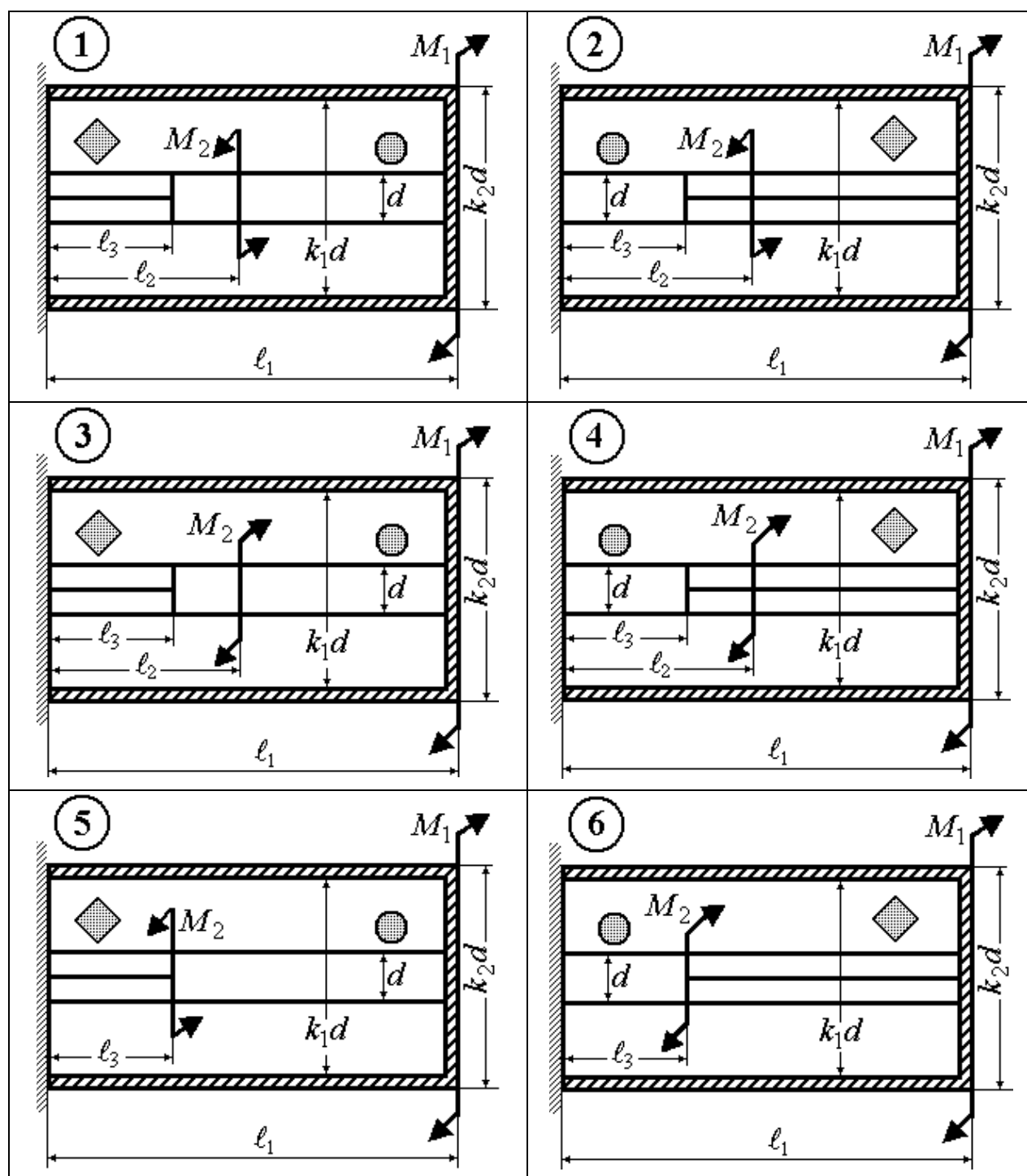


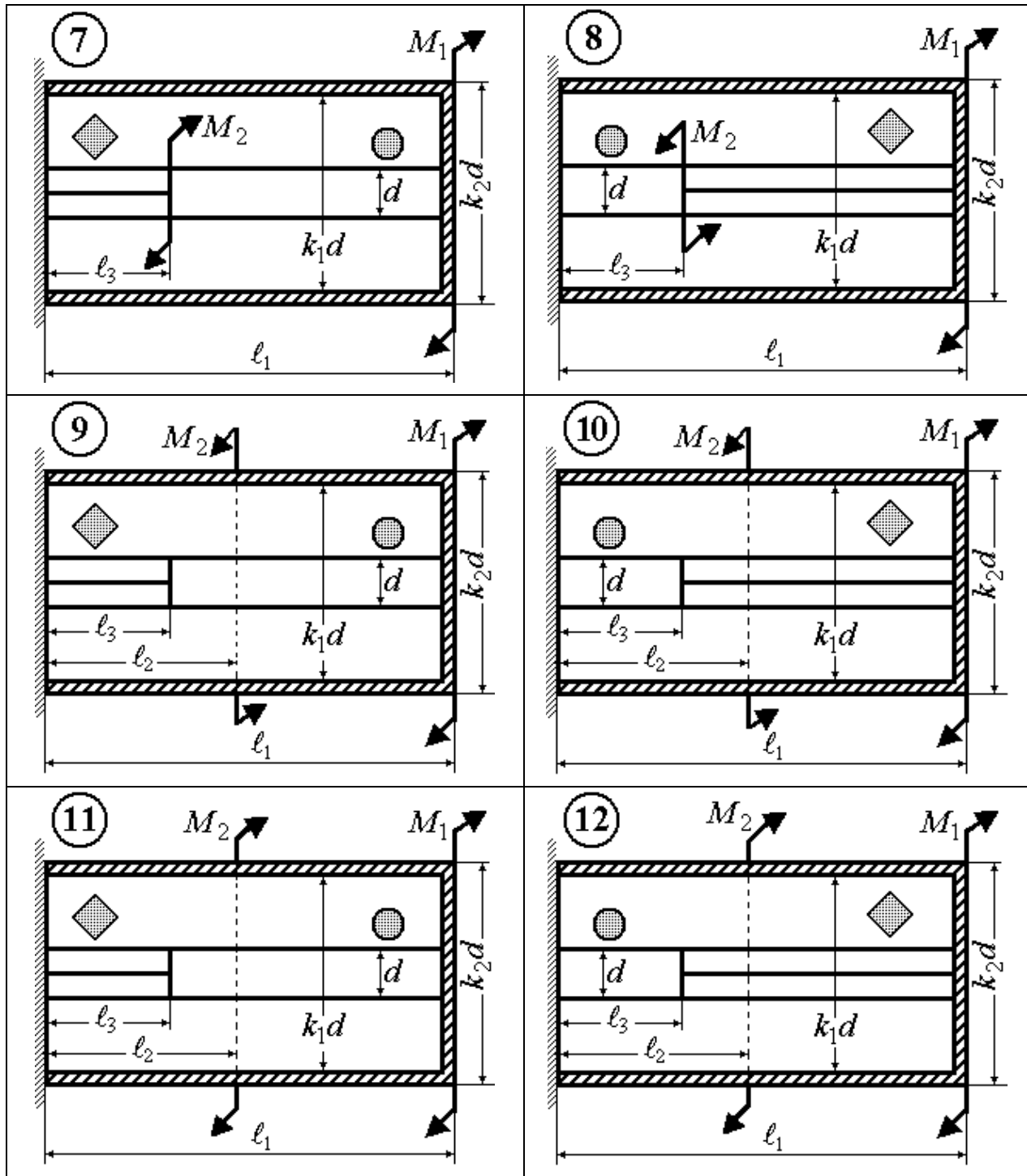
Вхідні дані до задачі 2.

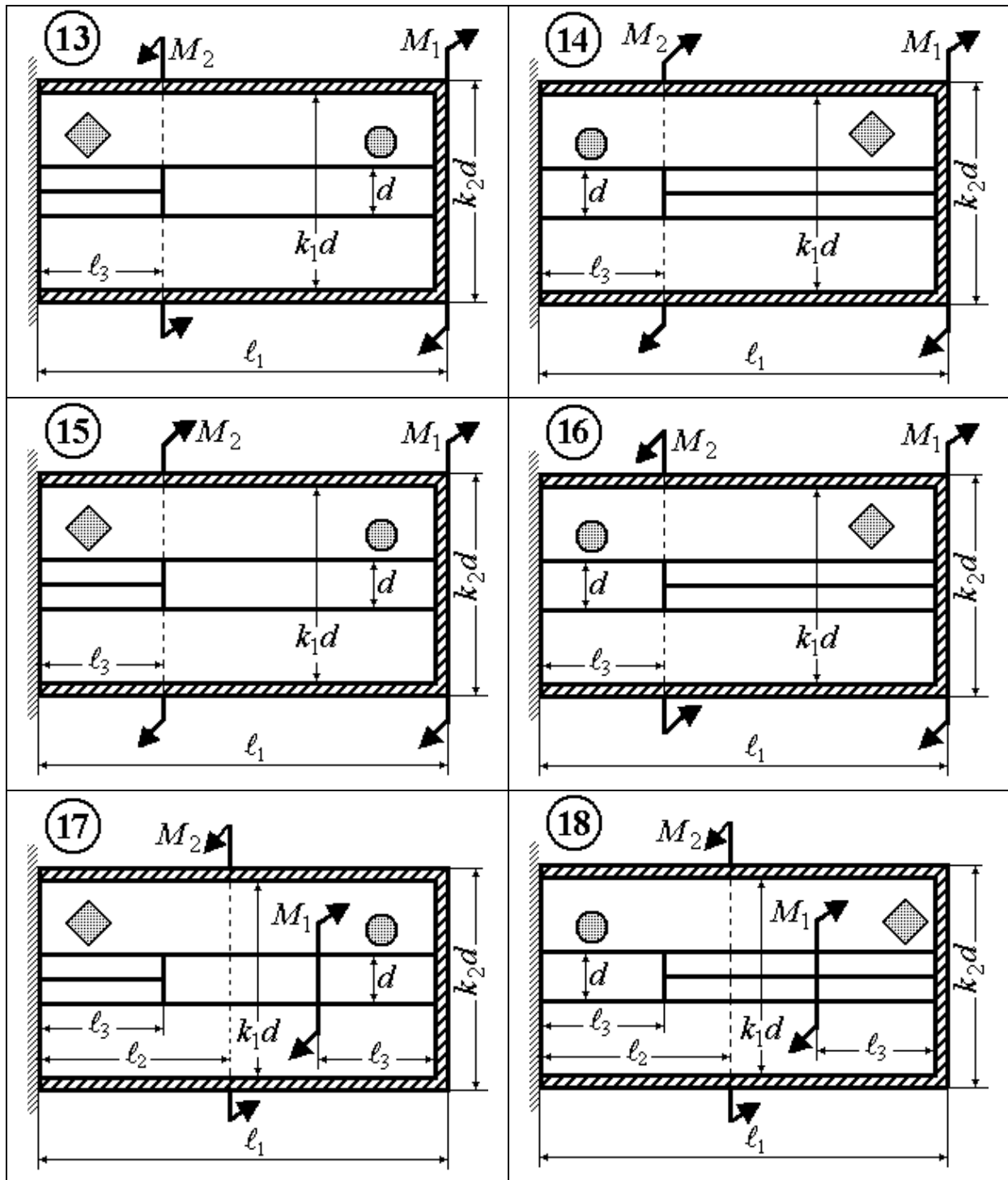
№ вар	$\ell_1$ , м	$\ell_2$ , м	$\ell_3$ , м	$k_1$	$k_2$	$M_1$ , Нм	$M_2$ , Нм	$[\tau]$ , МПа	$[\theta]$ , град/м
1	1,5	1,0	0,3	1,3	1,2	200	400	40	2,0
2	1,4	0,9	0,4	1,5	1,4	210	300	48	1,8
3	1,6	1,1	0,5	1,4	1,2	280	450	45	2,2
4	1,8	1,0	0,4	1,5	1,0	300	500	50	2,0
5	1,5	0,9	0,4	1,6	1,2	250	350	30	1,8
6	1,2	0,8	0,3	1,2	1,1	300	400	40	1,8
7	1,1	0,5	0,2	1,3	1,1	450	500	50	2,2
8	1,4	0,5	0,1	1,4	1,2	480	500	45	2,0
9	1,6	1,1	0,5	1,3	1,2	300	400	40	1,8
10	1,2	0,7	0,2	1,3	1,1	250	300	35	2,0
11	1,5	0,8	0,3	1,2	1,0	350	400	40	2,2
12	1,6	1,0	0,5	1,5	1,2	400	450	50	2,2
13	1,2	0,8	0,5	1,6	1,4	450	500	45	2,0
14	1,5	0,5	0,5	1,8	1,4	350	400	40	1,8
15	1,3	0,6	0,2	1,2	1,1	280	350	30	2,0
16	1,4	0,8	0,4	1,3	1,1	200	350	35	1,8
17	1,3	0,7	0,4	1,4	1,2	300	400	50	2,4
18	1,2	0,5	0,2	1,5	1,3	350	500	52	2,2
19	1,0	0,5	0,2	1,6	1,4	200	350	40	1,8
20	1,5	1,0	0,5	1,5	1,1	300	400	50	1,8
21	1,6	1,4	1,0	1,6	1,5	250	450	40	2,0
22	1,1	0,5	0,1	1,4	1,1	300	450	35	1,8
23	1,2	0,8	0,3	1,2	1,1	250	450	40	2,0
24	1,1	1,0	0,5	1,6	1,2	350	400	50	2,2

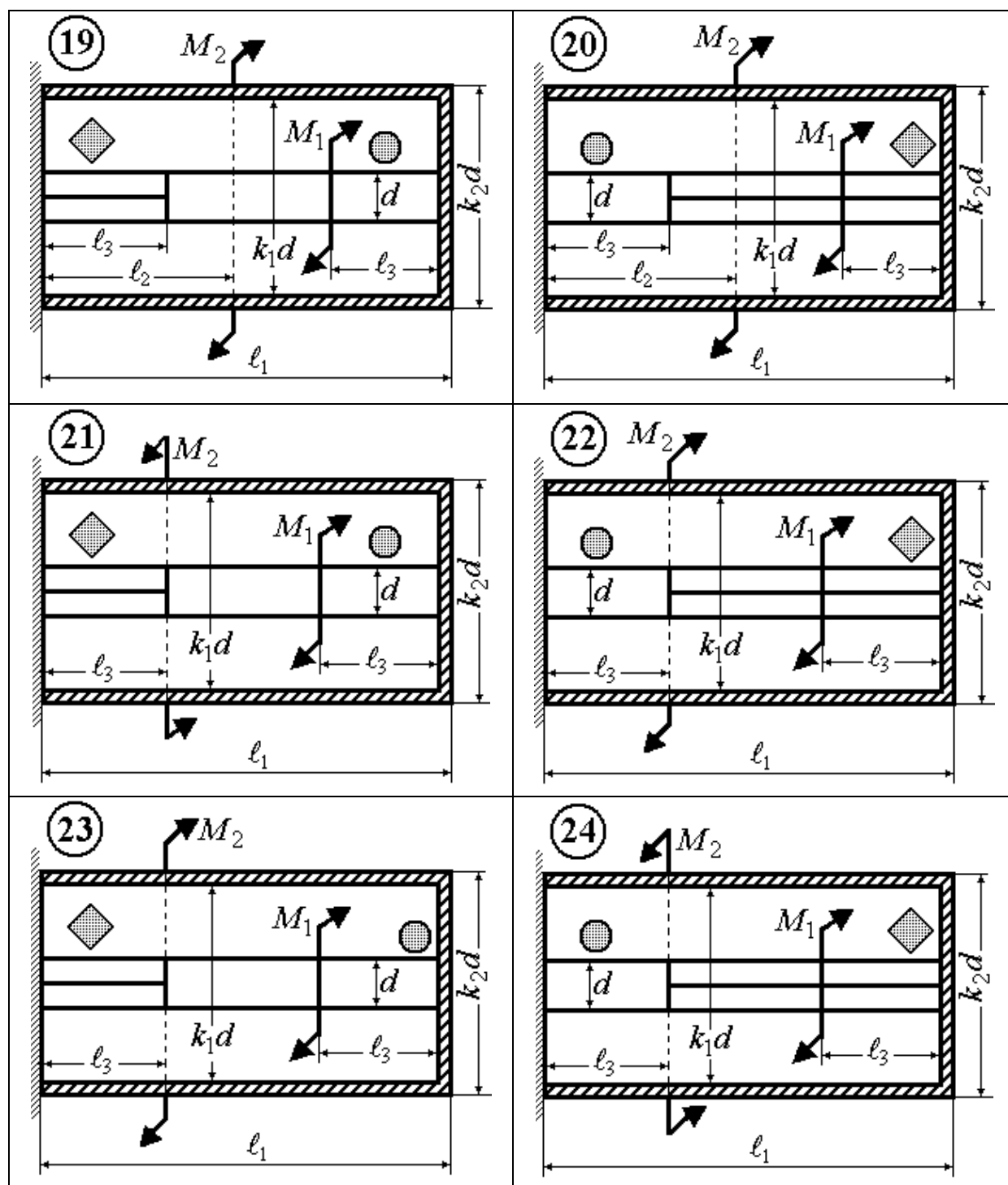
Примітка. Модуль зсуву матеріалу стержня –  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа

## Задача 3. Статично невизначуваний вал (паралельне розташування)









Вхідні дані до задачі 3.

№ вар.	$\ell_1$ , м	$\ell_2$ , м	$\ell_3$ , м	$d$ , мм	$k_1$	$k_2$	$[\tau]$ , МПа	$[\Theta]$ , град/м
1.	1,1	0,5	0,3	32	1,2	1,5	50	1,8
2.	1,2	0,4	0,1	35	1,1	1,4	45	2,0
3.	1,4	0,5	0,3	35	1,3	1,6	50	1,4
4.	1,5	0,5	0,2	32	1,4	1,6	60	1,7
5.	1,6	0,6	0,3	32	1,2	1,5	70	1,6
6.	1,5	0,6	0,4	35	1,3	1,6	65	1,8
7.	1,8	0,5	0,2	30	1,3	1,7	55	1,5
8.	1,7	0,4	0,1	32	1,4	1,8	60	1,6
9.	1,5	0,6	0,2	30	1,2	2,0	70	1,8
10.	1,5	0,5	0,1	30	1,5	2,0	80	1,1
11.	1,6	0,6	0,3	32	1,7	2,3	70	1,4
12.	1,5	0,5	0,1	35	1,5	2,0	65	1,6
13.	1,6	0,6	0,2	35	1,4	2,1	60	1,7
14.	1,5	0,7	0,2	38	1,5	2,2	55	1,8
15.	1,8	0,6	0,2	35	1,8	2,2	65	1,8
16.	2,0	1,0	0,5	32	2,0	2,4	75	2,0
17.	1,8	0,9	0,3	35	1,7	2,0	65	1,8
18.	1,5	1,0	0,1	38	1,5	2,0	55	1,2
19.	1,6	1,0	0,2	35	1,6	2,1	65	1,5
20.	1,5	0,8	0,2	32	1,5	1,8	70	1,4
21.	1,6	0,7	0,3	35	1,4	2,0	60	1,5
22.	1,5	0,4	0,1	38	1,2	1,8	50	1,8
23.	1,6	0,5	0,2	30	1,3	1,9	45	2,0
24.	1,8	0,6	0,3	38	1,4	2,0	50	2,2

Примітка. Модуль зсуву матеріалу стержня –  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа

$$M_1 = k_1 \cdot M$$

$$M_2 = k_2 \cdot M.$$

## Приклади розв'язання задач

### 2.3.1. Зразок виконання задачі 1

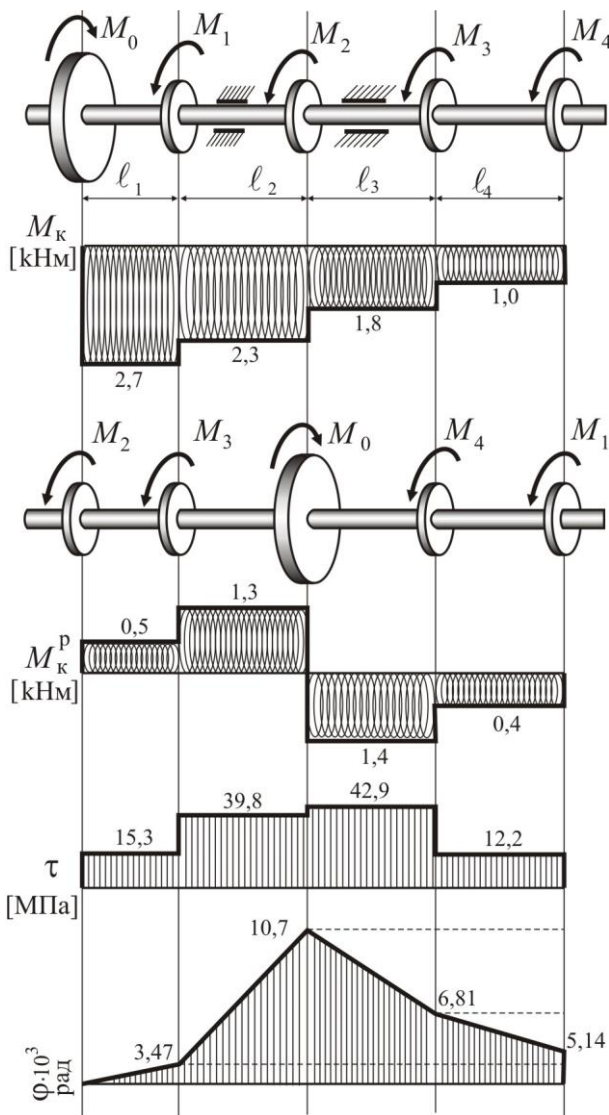


Рисунок 19

Порядок розв'язання задачі:

1. Накреслити схему системи.
2. Визначити значення крутних моментів:

$$M_1 = 9,55 \cdot \frac{20}{478} \cong 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = 9,55 \cdot \frac{25}{478} \cong 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad (2.1)$$

$$M_3 = 9,55 \cdot \frac{40}{478} \cong 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = 9,55 \cdot \frac{50}{478} \cong 1,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Потужність, що передається шківом, дорівнює:

$$N_1 = 20 \text{ кВт}; \quad N_2 = 25 \text{ кВт};$$

$$N_3 = 40 \text{ кВт}; \quad N_4 = 50 \text{ кВт},$$

при кутовій швидкості:

$$n = 478 \text{ об./хв.}$$

Довжини ділянок валу:

$$\ell_1 = 0,5 \text{ м}; \quad \ell_2 = 0,4 \text{ м};$$

$$\ell_3 = 0,2 \text{ м}; \quad \ell_4 = 0,3 \text{ м}.$$

Допустимі дотичні навантаження:

$$[\tau] = 50 \text{ МПа}.$$

Допустимий відносний кут закручування:

$$[\Theta] = 2,0 \text{ град./м}.$$

$$[\theta] = \frac{\pi \cdot [\Theta]}{180^\circ} = 0,035 \text{ рад./м};$$

Модуль зсуву –  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$



З умови статики:

$$\begin{aligned}\sum M_Z &= 0; \\ M_0 &= M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0,4 + 0,5 + 0,8 + 1,0 = 2,7 \text{ кНм.}\end{aligned}\tag{2.2}$$

3. Згідно з методом перерізів епюра крутних моментів має вигляд  $M_K$ .

4. Визначення діаметра  $d$  суцільного вала. Ділянка  $\ell_1$  є найнебезпечнішою.

З умови міцності:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{M_{\text{кmax}}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow \\ d &\geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кmax}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,7 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м.}\end{aligned}$$

5. Розташуємо шківів раціонально і побудуємо епюру  $M_K^p$ . Рекомендується шківів, що мають менший момент, розташовувати по краям вала.

6. Визначення розмірів поперечного перерізу (діаметра суцільного вала):

– з умови міцності:

$$d_p^{\text{міц.}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кmax}}^p}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0,0522 \text{ м;}$$

– з умови жорсткості:

$$d_p^{\text{жорс.}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{кmax}}^p}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 3,5 \cdot 10^{-2}}} = 0,0475 \text{ м.}$$

Значення діаметра для суцільного вала обирається як більше з двох значень –  $d_p = \max \left\{ d_p^{\text{міц.}}; d_p^{\text{жорс.}} \right\}$ .

Діаметр суцільного вала для раціонального розташування шківів обираємо  $d = 55 \text{ мм}$ .

Момент опору круглого суцільного вала

$$W_p = \frac{\pi \cdot d_p^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,055^3}{16} = 32,67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Діаметр трубчастого вала для раціонального розташування шківів обчислюється при  $c = d/D = 0,8$  за формулою

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\kappa \max}^p}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 0,0622 \text{ м.}$$

$$D = 65 \text{ мм.}$$

При цьому максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa \max}^p}{W_p} = \frac{16 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 6,5^3 \cdot 10^{-6} (1 - 0,8^4)} \approx 44 \text{ МПа.}$$

7. Дотичні напруження на ділянках вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{\kappa 1}^p}{W_p} = \frac{0,5 \cdot 10^3}{32,67 \cdot 10^{-6}} = 15,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{\kappa 2}^p}{W_p} = \frac{1,3 \cdot 10^3}{32,67 \cdot 10^{-6}} = 39,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{\kappa 3}^p}{W_p} = \frac{-1,4 \cdot 10^3}{32,76 \cdot 10^{-6}} = -42,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 = \frac{M_{\kappa 4}^p}{W_p} = \frac{-0,4 \cdot 10^3}{32,67 \cdot 10^{-6}} = -12,2 \text{ МПа.}$$

Знак дотичних напружень особливого значення не має, тому при побудові епюри  $\tau$  можливо відкладання ординат по одну сторону.

8. Вага суцільного валу для заданої системи і вага суцільного валу при раціональному розташуванні шківів співвідносяться як площі поперечних перерізів:

$$\frac{A}{A_p} = \left( \frac{d}{d_p} \right)^2 = \left( \frac{65}{55} \right)^2 = 1,4.$$

Співвідношення ваг суцільного і трубчастого валів дає:

$$\frac{A_p}{A_{\text{тр.}}} = \left( \frac{d_p}{D} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - c^2} \approx 2.$$

Жорсткість на кручення суцільного валу:

$$G \cdot I_p = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 0,055^4}{32} = 71,9 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

9. Епюра кутів закручування в ділянках валу:

$$\varphi_1 = \frac{M_{к1}^p \cdot \ell_1}{G \cdot I_p} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{71,9 \cdot 10^3} = 3,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{к2}^p \cdot \ell_2}{G \cdot I_p} = \frac{1,3 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{71,9 \cdot 10^3} = 7,23 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{к3}^p \cdot \ell_3}{G \cdot I_p} = \frac{-1,4 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{71,9 \cdot 10^3} = -3,89 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_{к4}^p \cdot \ell_4}{G \cdot I_p} = \frac{-0,4 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{71,9 \cdot 10^3} = -1,67 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Миттєво зупинимо шків  $M_2$  і побудуємо епюру  $\varphi$  на першій ділянці. Прийматимемо за нульову позначку кут закручування першої ділянки та побудуємо епюру на другій ділянці і т.д. на третій та четвертій ділянках.

Підсумковий кут закручування

$$\varphi_{\Sigma} = \sum_{i=1}^4 \varphi_i = (3,47 + 7,23 - 3,89 - 1,67) \cdot 10^{-3} = 5,14 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Найбільший відносний кут закручування

$$\theta_{\max} = \frac{M_{к\max}^p}{G \cdot I_p} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{71,9 \cdot 10^3} = 19,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

Умова жорсткості  $\theta_{\max} \leq [\theta]$  виконується.

10. Побудуємо епюри дотичних напружень у поперечних перерізах суцільного і трубчастого валів.

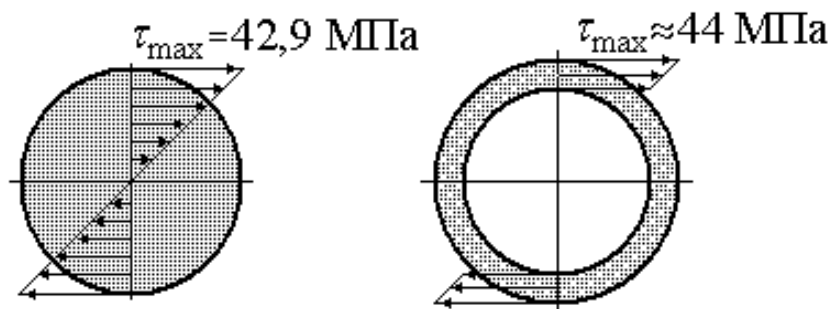


Рисунок 20

### 2.3.2. Зразок виконання задачі 2

Для послідовного розташування ділянок вала (прямокутна, трубчаста, кругла) розкрити статичну невизначуваність, з умов міцності та жорсткості визначити розміри поперечного перерізу.

Дано:

$$M_1 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_3 = 500 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$a = 1,5 \text{ м}; \quad b = 1,0 \text{ м}; \quad c = 0,2 \text{ м}; \quad k_1 = 1,3; \quad k_2 = 1,6; \quad G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = 40 \text{ МПа}; \quad [\Theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

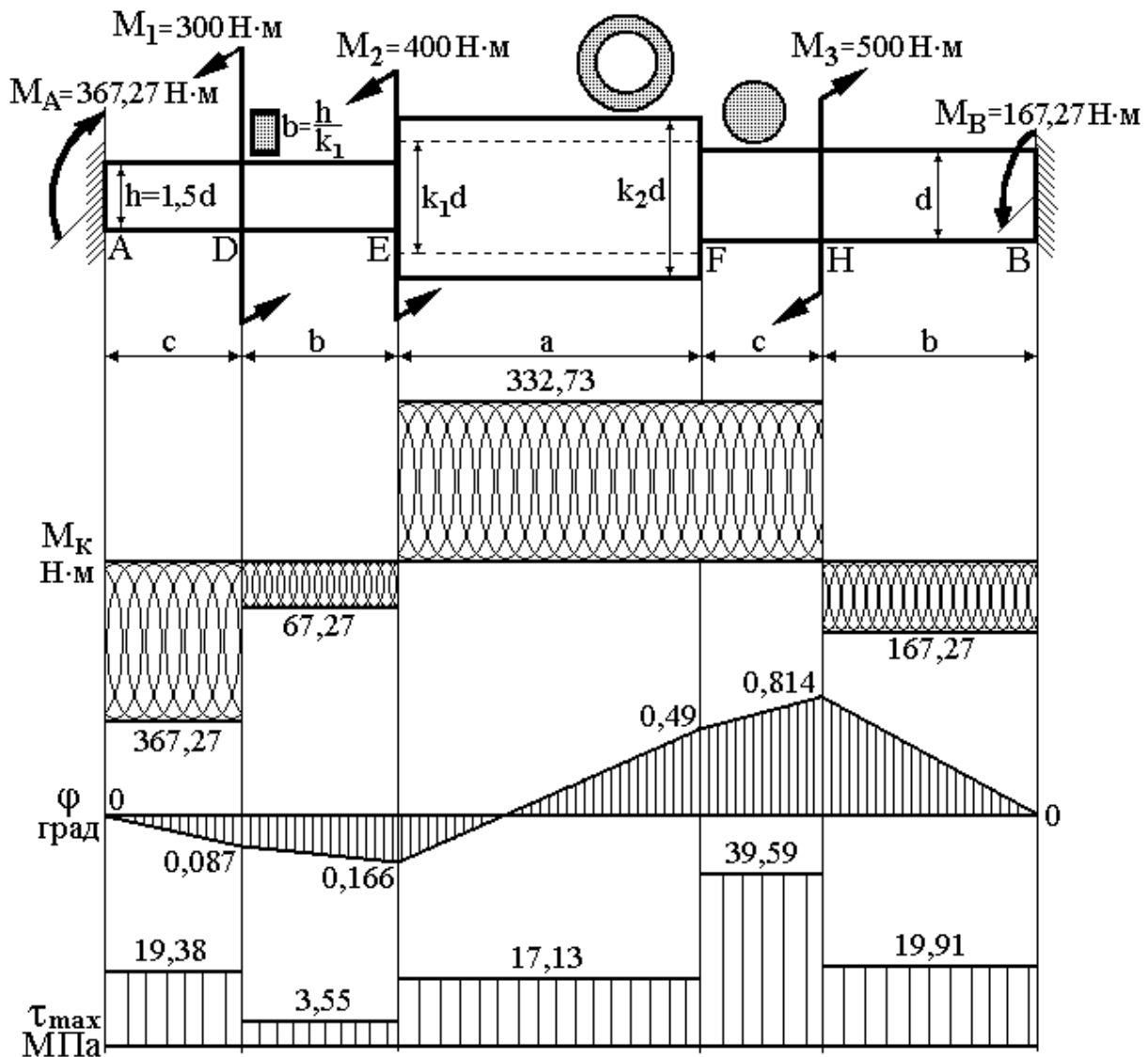


Рисунок 21

1. Визначимо геометричні характеристики поперечних перерізів ділянок вала:

– трубчаста частина:

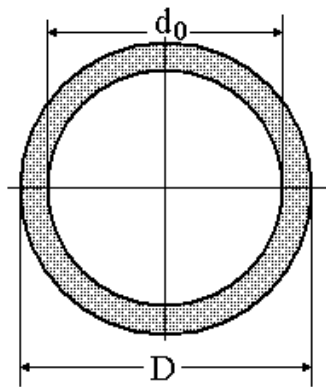


Рисунок 22

$d_0$  – внутрішній діаметр;  $D$  – зовнішній діаметр;

$$c = d_0 / D = k_1 / k_2 = 1,3 / 1,6 = 0,8125.$$

Полярний момент інерції:

$$I_{\text{рт}} = \frac{\pi \cdot D^4 (1 - c^4)}{32} = \frac{\pi \cdot k_2^4 \cdot d^4 (1 - c^4)}{32} = 0,363 d^4.$$

Полярний момент опору:

$$W_{\text{рт}} = \frac{\pi \cdot D^3 (1 - c^4)}{16} = \frac{\pi \cdot k_2^3 \cdot d^3 (1 - c^4)}{16} = 0,453 d^3.$$

– суцільна кругла частина вала:

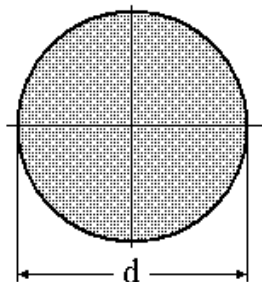


Рисунок 23

Полярний момент інерції:

$$I_{\text{рк}} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 0,098 \cdot d^4.$$

Полярний момент опору:

$$W_{\text{рк}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 0,196 \cdot d^3.$$

– прямокутна частина вала:  $h = 1,5 \cdot d$ ;  $b = \frac{h}{k_1} = \frac{1,5 \cdot d}{1,3} = 1,15 \cdot d$ .

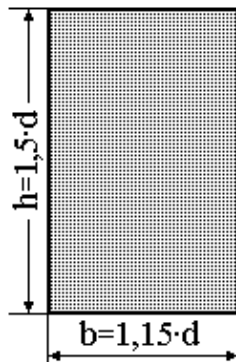


Рисунок 24

Момент інерції при крученні:  $I_{\text{к}} = \beta \cdot h \cdot b^3$ ,

$\beta = 0,177$  залежить від співвідношення сторін прямокутника  $\frac{h}{b} = 1,3$ ; (див. табл. 2).

$$I_{\text{к}} = 0,177 \cdot 1,5 \cdot d \cdot 1,15^3 \cdot d^3 = 0,404 \cdot d^4.$$

Момент опору при крученні:

$$W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2,$$

$\alpha = 0,223$  залежить від співвідношення сторін прямокутника  $\frac{h}{b} = 1,3$ ; (див. табл. 2).

$$W_k = 0,223 \cdot 1,5 \cdot d \cdot 1,15^2 \cdot d^2 = 0,442 \cdot d^3.$$

2. Розкриємо статичну невизначуваність даної схеми.

При даному типі навантаження в місцях закріплення вала виникають два реактивні моменти  $M_A$  та  $M_B$  в площинах, перпендикулярних до осі стержня. Ступінь статичної невизначуваності  $n = 2 - 1$  дорівнює одиниці. Задача є один раз статично невизначувана.

**Статичний аспект задачі:**

З умов рівноваги вала:

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = 0; \quad -M_A + M_1 + M_2 - M_3 + M_B = 0. \quad (2.3)$$

**Геометричний аспект задачі:**

Оскільки обидва кінці вала жорстко закріплені, то кут повороту переріза  $A$  відносно  $B$  дорівнює нулю:  $\varphi_{BA} = 0$ .

На підставі принципу незалежності дії сил абсолютний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування від кожного зовнішнього моменту, і останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$\varphi_{BA}(M_A) + \varphi_{BA}(M_1) + \varphi_{BA}(M_2) + \varphi_{BA}(M_3) = 0. \quad (2.4)$$

**Фізичний аспект задачі:**

Використовуючи формулу закону Гука, запишемо вирази для кутів закручування:

$$\begin{aligned} \varphi_{BA}(M_A) &= -\frac{M_A \cdot (c+b)}{G \cdot I_k} - \frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_{pt}} - \frac{M_A \cdot (c+b)}{G \cdot I_{pk}}, \\ \varphi_{BA}(M_1) &= \frac{M_1 \cdot b}{G \cdot I_k} + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_{pt}} + \frac{M_1 \cdot (c+b)}{G \cdot I_{pk}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{BA}(M_2) &= \frac{M_2 \cdot a}{G \cdot I_{\text{рт}}} + \frac{M_2 \cdot (c+b)}{G \cdot I_{\text{рк}}}; \\ \varphi_{BA}(M_3) &= -\frac{M_3 \cdot b}{G \cdot I_{\text{рк}}}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Якщо підставити вирази (2.5) у вираз (2.4), матимемо:

$$\begin{aligned}& -M_A \cdot \left( \frac{c+b}{I_{\text{к}}} + \frac{a}{I_{\text{рт}}} + \frac{c+b}{I_{\text{рк}}} \right) + \\ & + M_1 \cdot \left( \frac{b}{I_{\text{к}}} + \frac{a}{I_{\text{рт}}} + \frac{c+b}{I_{\text{рк}}} \right) + \\ & + M_2 \cdot \left( \frac{a}{I_{\text{рт}}} + \frac{c+b}{I_{\text{рк}}} \right) - M_3 \left( \frac{b}{I_{\text{рк}}} \right) = 0,\end{aligned}\tag{2.6}$$

із якого знаходимо значення  $M_A$ . Аналогічно можна визначити і другий реактивний момент  $M_B$ , для чого розглянемо кут закручування перерізу  $B$  відносно  $A$ :  $\varphi_{AB} = 0$ .

У нашому випадку:

$$\begin{aligned}& -M_A \cdot \left( \frac{1,2}{0,404 \cdot d^4} + \frac{1,5}{0,363 \cdot d^4} + \frac{1,2}{0,098 \cdot d^4} \right) + \\ & + M_1 \cdot \left( \frac{1,0}{0,404 \cdot d^4} + \frac{1,5}{0,363 \cdot d^4} + \frac{1,2}{0,098 \cdot d^4} \right) + \\ & + M_2 \cdot \left( \frac{1,5}{0,363 \cdot d^4} + \frac{1,2}{0,098 \cdot d^4} \right) - M_3 \frac{1,0}{0,098 \cdot d^4} = 0; \\ & -M_A \cdot (2,97 + 4,13 + 12,24) + \\ & + M_1 \cdot (2,48 + 4,13 + 12,24) + \\ & + M_2 \cdot (4,13 + 12,24) - M_3 \cdot 10,2 = 0;\end{aligned}$$

$$M_A = \frac{M_1 \cdot 18,85 + M_2 \cdot 16,37 - M_3 \cdot 10,2}{19,34} =$$

$$= \frac{5655 + 6548 - 5100}{19,34} = 367,27 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_A = 367,27 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

З рівняння (2.3) знаходимо:

$$M_B = -M_1 - M_2 + M_3 + M_A =$$

$$= -300 - 400 + 500 + 367,27 = 167,27 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Будуємо епюру крутних моментів.
4. Доберемо розміри поперечних перерізів на частинах вала з умови міцності:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_i} \leq [\tau];$$

*трубчаста частина вала:*  $M_K = 332,73 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{M_K}{0,453 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{332,73}{0,453 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 2,638 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

*кругла частина вала:*  $M_{K\max} = 332,73 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{K\max}}{0,196 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{332,73}{0,196 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 3,488 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

*прямокутна частина вала:*  $M_{K\max} = 367,27 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{K\max}}{0,442 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{367,27}{0,442 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 2,749 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

З трьох діаметрів слід вибрати більший  $d = 35 \text{ мм}$ , знайдений з умови міцності для круглої частини вала.

У цьому разі максимальні дотичні напруження в інших частинах вала:



<i>кругла</i>	$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{332,73}{0,196 \cdot 3,5^3 \cdot 10^6} = 39,59 \text{ МПа};$
	$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} = \frac{167,27}{0,196 \cdot 3,5^3 \cdot 10^6} = 19,91 \text{ МПа};$
<i>трубчаста</i>	$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\text{пр}}} = \frac{332,73}{0,453 \cdot 3,5^3 \cdot 10^6} = 17,13 \text{ МПа};$
<i>прямокутна</i>	$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}} = \frac{367,27}{0,442 \cdot 3,5^3 \cdot 10^{-6}} = 19,38 \text{ МПа};$
	$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}} = \frac{67,27}{0,442 \cdot 3,5^3 \cdot 10^{-6}} = 3,55 \text{ МПа}.$

5. Побудуємо епюру кутів закручування.

Послідовно для частин вала знаходимо значення кутів закручування (в радіанах і в градусах).

$$\begin{aligned} \varphi_{AD} &= \frac{M_{\kappa}^{AD} \cdot c}{G \cdot I_{\kappa}} = \frac{-367,27 \cdot 0,2}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,404 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -1,515 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = -0,087 (\text{град}); \\ \varphi_{DE} &= \frac{M_{\kappa}^{DE} \cdot b}{G \cdot I_{\kappa}} = \frac{-67,27 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,404 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -1,387 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = -0,079 (\text{град}); \\ \varphi_{EF} &= \frac{M_{\kappa}^{EF} \cdot a}{G \cdot I_{\text{пр}}} = \frac{332,73 \cdot 1,5}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,363 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 11,453 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = 0,656 (\text{град}); \\ \varphi_{FH} &= \frac{M_{\kappa}^{FH} \cdot c}{G \cdot I_{\text{рк}}} = \frac{332,73 \cdot 0,2}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,098 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 5,656 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = 0,324 (\text{град}); \\ \varphi_{HB} &= \frac{M_{\kappa}^{HB} \cdot b}{G \cdot I_{\text{рк}}} = \frac{-167,27 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,098 \cdot 3,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -14,218 \cdot 10^{-3} (\text{рад}) = -0,815 (\text{град}). \end{aligned}$$

Умови жорсткості виконані, допустимий відносний кут закручування:

$$[\theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}; \Leftrightarrow [\theta] = 35 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

$$\theta_{\max} = \theta_{\text{FH}} = \frac{5,656 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 28,28 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{\text{рад}}{\text{м}} \right] \leq [\theta] = 3,5 \cdot 10^{-2} \left[ \frac{\text{рад}}{\text{м}} \right].$$

Будуємо епюру кутів закручування:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{AD}} &= -0,087^\circ \\ \varphi_{\text{AE}} &= \varphi_{\text{AD}} + \varphi_{\text{DE}} = -0,087 - 0,079 = -0,166^\circ \\ \varphi_{\text{AF}} &= \varphi_{\text{AE}} + \varphi_{\text{EF}} = -0,166 + 0,656 = 0,49^\circ \\ \varphi_{\text{AH}} &= \varphi_{\text{AF}} + \varphi_{\text{FH}} = 0,49 + 0,324 = 0,814^\circ \\ \varphi_{\text{AB}} &= \varphi_{\text{AH}} + \varphi_{\text{HB}} = 0,814 - 0,815 \approx 0\end{aligned}$$

Якщо абсолютний кут закручування перерізу  $A$  відносно перерізу  $B$  з заданою точністю ( $3 \div 5 \%$ ) буде дорівнювати нулю, то епюра  $\varphi$  побудована вірно.

Точність визначення абсолютного кута закручування  $\xi$  можна визначити наступним чином:

$$\xi = \frac{\varepsilon}{\Omega_{\text{cp}}} \cdot 100 \% \leq 3 \div 5 \%,$$

де  $\varepsilon$  - різниця між додатними та від'ємними складниками при перемноженні епюр, взятих по модулю;  $\Omega_{\text{cp}}$  - середнє значення між додатними та від'ємними складниками, взятих по модулю.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= |0,814 - 0,815| = 0,001; \\ \Omega_{\text{cp}} &= \frac{0,814 + 0,815}{2} = 0,8145; \\ \xi &= \frac{\varepsilon}{\Omega_{\text{cp}}} \cdot 100 \% = \frac{0,001}{0,8145} \cdot 100 \% = 0,12 \%\end{aligned}$$

### 2.3.3. Зразок виконання задачі 3

Для паралельного розташування ділянок (внутрішня – прямокутна, кругла; зовнішня – трубчаста) розкрити статичну невизначуваність, з умови міцності визначити допустиме значення параметра  $M$ .

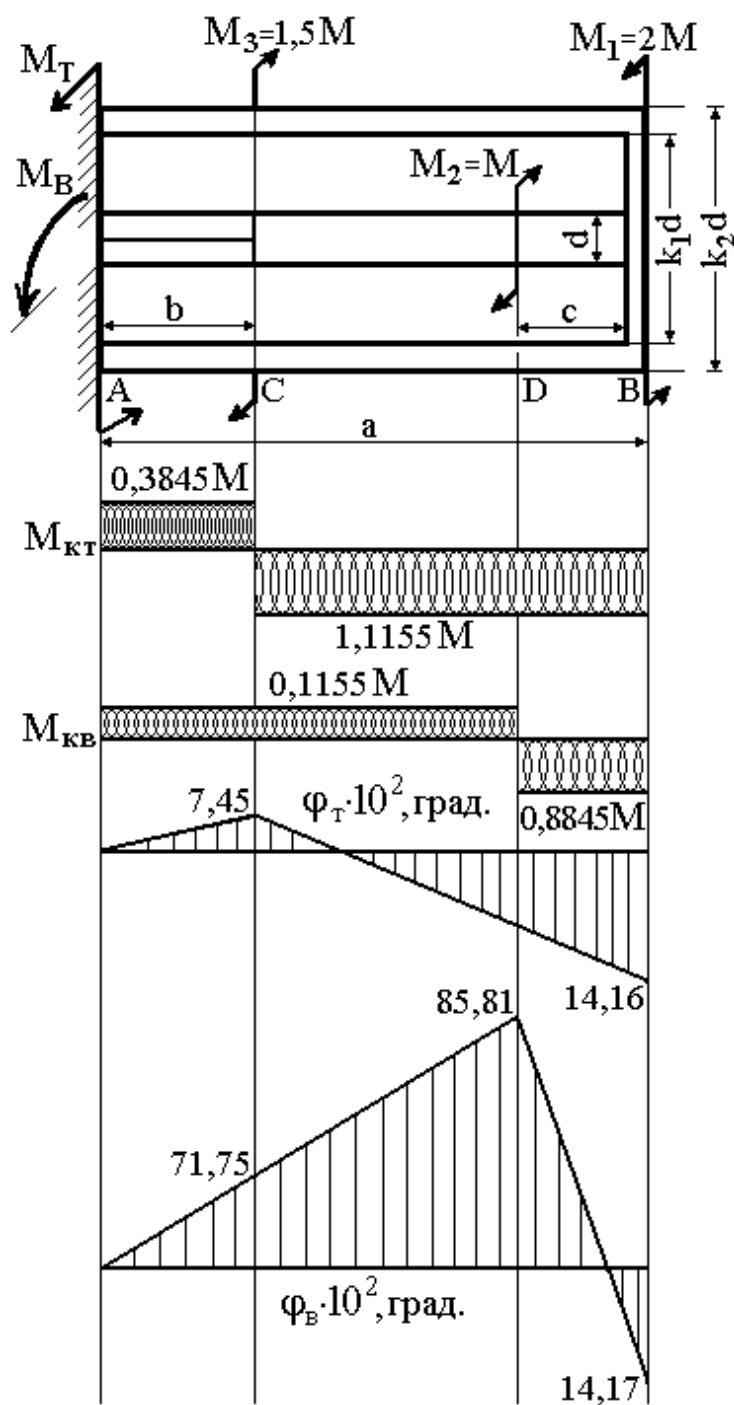


Рисунок 25

$$k_1 = 1,5; k_2 = 2,0.$$

$$d = 30 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 50 \text{ МПа};$$

$$[\theta] = 2 \frac{\text{град.}}{\text{м}};$$

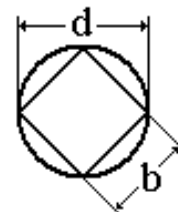
$$G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

$$a = 2,0 \text{ м};$$

$$b = 1,0 \text{ м};$$

$$c = 0,5 \text{ м}.$$

Геометричні  
характеристики перерізів:  
– внутрішній вал:



квадратна частина:

$$W_k = \alpha \cdot h^3; \alpha = 0,208;$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} d = 21,21 \text{ мм.}$$

$$\beta = 0,141$$

$$W_k = 0,208 \cdot 21,21^3 \cdot 10^{-9} =$$

$$= 19,85 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3;$$

$$I_k = \beta \cdot h^4 =$$

$$= 0,141 \cdot 21,21^4 \cdot 10^{-12} =$$

$$= 28,54 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

кругла частина:

$$W_{\text{pB}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 30^3 \cdot 10^{-9}}{16} = 53,01 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3;$$

$$I_{\text{pB}} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 30^4 \cdot 10^{-12}}{32} = 79,52 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

зовнішня трубка:

$$d_{\text{T}} = k_1 \cdot d = 1,5 \cdot 30 = 45 \text{ мм}; \quad D_{\text{T}} = k_2 \cdot d = 2,0 \cdot 30 = 60 \text{ мм}.$$

$$c = \frac{d_{\text{T}}}{D_{\text{T}}} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{1,5}{2,0} = 0,75$$

$$I_{\text{pT}} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot (1 - c^4)}{32} = \frac{\pi \cdot 60^4 \cdot 10^{-12} \cdot (1 - 0,75^4)}{32} = 927,8 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

$$W_{\text{pT}} = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot (1 - c^4)}{16} = \frac{\pi \cdot 60^3 \cdot 10^{-9} \cdot (1 - 0,75^4)}{16} = 309,25 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3.$$

2. Розкриття статичної невизначуваності:

Складаємо рівняння статики:  $\sum M_Z = 0$ ;

$$M_{\text{B}} + M_{\text{T}} - M_3 - M_2 + M_1 = 0, \quad (2.7)$$

де  $M_{\text{B}}$  – опорний момент, діючий на валу;  $M_{\text{T}}$  – опорний момент, діючий на трубці в перерізі  $A$ .

Складаємо умови сумісності переміщень: кути закручування в перерізі  $B$  на валу і трубці однакові:

$$\varphi_{\text{T}}^B = \varphi_{\text{B}}^B. \quad (2.8)$$

Використовуємо закон Гука для кутів закручування:

у трубці:

$$\varphi_{\text{T}}^B = \frac{M_{\text{T}} \cdot a}{G \cdot I_{\text{pT}}} - \frac{M_3 \cdot (a - b)}{G \cdot I_{\text{pT}}}; \quad (2.9)$$

для вала:

$$\varphi_B = \frac{M_B \cdot b}{G \cdot I_k} + \frac{M_B \cdot (a-b)}{G \cdot I_{pB}} - \frac{M_2 \cdot c}{G \cdot I_{pB}}. \quad (2.10)$$

Далі прирівнюємо отримані рівняння:

$$\frac{M_T \cdot a}{G \cdot I_{pT}} - \frac{M_3 \cdot (a-b)}{G \cdot I_{pT}} = \frac{M_B \cdot b}{G \cdot I_k} + \frac{M_B \cdot (a-b)}{G \cdot I_{pB}} - \frac{M_2 \cdot c}{G \cdot I_{pB}}.$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} M_T &= \frac{a-b}{a} \cdot M_3 - \frac{c}{a} \cdot \frac{I_{pT}}{I_{pB}} \cdot M_2 + \frac{I_{pT}}{a} \cdot \left( \frac{b}{I_k} + \frac{a-b}{I_{pB}} \right) \cdot M_B; \\ M_T &= \frac{2,0-1,0}{2,0} \cdot M_3 - \frac{0,5}{2,0} \cdot \frac{927,8}{79,52} \cdot M_2 + \\ &+ \frac{927,8}{2,0} \cdot \left( \frac{1,0}{28,54} + \frac{2,0-1,0}{79,52} \right) \cdot M_B = \\ &= 0,750 \cdot M - 2,917 \cdot M + 22,088 \cdot M_B = \\ &= -2,167 \cdot M + 22,088 \cdot M_B. \end{aligned} \quad (2.11)$$

З урахуванням рівняння (2.7), знаходимо:

$$M_T = 0,3845 \cdot M; \quad M_B = 0,1155 \cdot M.$$

Далі будуємо епюри крутних моментів у трубці і на валу.

Визначимо допустиме значення параметра  $M$  з умови міцності на окремих ділянках конструкції:

$$\text{для трубки: } \tau_{\max}^T = \frac{M_{\text{к max}}^T}{W_{pT}} \leq [\tau];$$

$$\begin{aligned} 1,1155 \cdot M \leq W_{pT} \cdot [\tau]; \Rightarrow [M]_T &= \frac{W_{pT} \cdot [\tau]}{1,1155} = \frac{309,25 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^6}{1,1155}; \\ [M]_T &= 1386,15 \text{ Н} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\text{для квадратної частини вала: } \tau_{\max}^K = \frac{M_{\text{к max}}^K}{W_K} \leq [\tau];$$

$$0,1155 \cdot M \leq W_k \cdot [\tau]; \Rightarrow [M]_{B1} = \frac{W_k \cdot [\tau]}{0,1155} = \frac{19,85 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^6}{0,1155};$$

$$[M]_{B1} = 859,31 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

для круглої частини вала:  $\tau_{\max}^B = \frac{M_{k \max}^B}{W_{pB}} \leq [\tau];$

$$0,8845 \cdot M \leq W_{pB} \cdot [\tau]; \Rightarrow [M]_{B2} = \frac{W_{pB} \cdot [\tau]}{0,8845} = \frac{53,01 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^6}{0,8845};$$

$$[M]_{B2} = 299,66 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким чином, допустиме значення параметра крутного моменту визначеного з умови міцності, необхідно обрати:

$$[M]_{\text{міцн.}} = \min \left\{ [M]_T; [M]_{B1}; [M]_{B2} \right\} = 299,66 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Визначимо допустиме значення параметра  $M$  з умови жорсткості на окремих ділянках конструкції:

$$[\theta] = \frac{\pi \cdot [\vartheta]}{180} = 0,0349 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

для трубки:  $\theta_{\max}^T = \frac{M_{k \max}^T}{G \cdot I_{pT}} \leq [\theta];$

$$1,1155 \cdot M \leq G \cdot I_{pT} \cdot [\theta]; \Rightarrow$$

$$[M]_T = \frac{G \cdot I_{pT} \cdot [\theta]}{1,1155} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 927,8 \cdot 10^{-9} \cdot 0,0349}{1,1155};$$

$$[M]_T = 2322,20 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

для квадратної частини вала:  $\theta_{\max}^K = \frac{M_{k \max}^K}{G \cdot I_K} \leq [\theta];$

$$0,1155 \cdot M \leq G \cdot I_K \cdot [\theta]; \Rightarrow$$

$$[M]_{B1} = \frac{G \cdot I_K \cdot [\theta]}{0,1155} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 28,54 \cdot 10^{-9} \cdot 0,0349}{0,1155};$$

$$[M]_{B1} = 689,90 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

для круглої частини вала:  $\theta_{\max}^B = \frac{M_{\kappa \max}^B}{G \cdot I_{\text{pB}}} \leq [\theta];$

$$0,8845 \cdot M \leq G \cdot I_{\text{pB}} \cdot [\theta]; \Rightarrow$$

$$[M]_{\text{B2}} = \frac{G \cdot I_{\text{pB}} \cdot [\theta]}{0,8845} = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 79,52 \cdot 10^{-9} \cdot 0,0349}{0,8845};$$

$$[M]_{\text{B2}} = 251,01 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким чином, допустиме значення параметра крутного моменту визначеного з умови жорсткості необхідно обрати:

$$[M]_{\text{жорст.}} = \min \left\{ [M]_{\text{Г}}; [M]_{\text{B1}}; [M]_{\text{B2}} \right\} = 251,01 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для того, щоб конструкція задовольняла умові міцності та умові жорсткості одночасно, з двох визначених допустимих значень параметра крутного моменту необхідно обрати менший.

$$[M] = \min \left\{ [M]_{\text{міцн.}}; [M]_{\text{жорст.}} \right\} = 251,01 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Обчислимо абсолютні кути закручування на окремих ділянках та побудуємо епюри розподілу кутів закручування в трубці і на валу:

$$\frac{M}{G} = \frac{251,01}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 313,7625 \cdot 10^{-11};$$

трубка:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{AC}}^T &= \frac{0,3845 \cdot M \cdot b}{G \cdot I_{\text{pT}}} = \frac{0,3845 \cdot 1,0}{927,8 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{M}{G} = 4,144 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= 4,144 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 7,45 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{CB}^T &= -\frac{1,1155 \cdot M \cdot (a-b)}{G \cdot I_{PT}} = -\frac{1,1155 \cdot 1,0}{927,8 \cdot 10^{-9}} \frac{M}{G} = -12,023 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= -12,023 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -21,61 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \\ \varphi_{AB}^T &= \varphi_{AC}^T + \varphi_{CB}^T = (7,45 - 21,61) \cdot 10^{-2} = -14,16 \cdot 10^{-2} \text{ град.}\end{aligned}$$

вала:

$$\begin{aligned}\varphi_{AC}^B &= \frac{0,1155 \cdot M \cdot b}{G \cdot I_K} = \frac{0,1155 \cdot 1,0}{28,54 \cdot 10^{-9}} \frac{M}{G} = 40,470 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= 40,470 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 72,75 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \\ \varphi_{CD}^B &= \frac{0,1155 \cdot M \cdot (a-b-c)}{G \cdot I_{PB}} = \frac{0,1155 \cdot 0,5}{79,52 \cdot 10^{-9}} \frac{M}{G} = 7,262 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= 7,262 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 13,06 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \\ \varphi_{DB}^B &= -\frac{0,8845 \cdot M \cdot c}{G \cdot I_{PB}} = -\frac{0,8845 \cdot 0,5}{79,52 \cdot 10^{-9}} \frac{M}{G} = -55,615 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= -55,615 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -99,98 \cdot 10^{-2} \text{ град.} \\ \varphi_{AB}^B &= \varphi_{AC}^B + \varphi_{CD}^B + \varphi_{CB}^B = \\ &= (72,75 + 13,06 - 99,98) \cdot 10^{-2} = -14,17 \cdot 10^{-2} \text{ град.}\end{aligned}$$

Як бачимо, кути закручування трубки і вала в перерізі  $B$  відносно нерухомого перерізу  $A$  практично збігаються – похибка незбігу дорівнює:

$$\xi = \frac{\left| \varphi_{AB}^T - \varphi_{AB}^B \right|}{\frac{\left| \varphi_{AB}^T + \varphi_{AB}^B \right|}{2}} \cdot 100 \% = \frac{0,01}{14,165} \cdot 100 \% \approx 0,07 \%$$

Максимальний відносний кут закручування буде на ділянці  $DB$  вала:



$$\begin{aligned}\Theta_{\max} &= \frac{0,8845 \cdot M}{G \cdot I_{\text{pB}}} = \frac{0,8845}{79,52 \cdot 10^{-9}} \frac{M}{G} = 111,230 \cdot 10^5 \cdot \frac{M}{G} = \\ &= 111,230 \cdot 10^5 \cdot 313,7625 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \\ &= 199,96 \cdot 10^{-2} \frac{\text{град}}{\text{м}} \leq [\Theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.\end{aligned}$$

Допустимі значення крутних моментів, визначених з умови міцності менші обраного з умови жорсткості значення, тому можна вважати, що і умова міцності буде виконуватись на всіх ділянках.

## Список літератури

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів : підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський – К. : Вища школа, 1993. – 655 с.: іл.
2. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов / В.И. Феодосьев – М. : Наука, 1986. – 512 с.
3. Решетов Д.Н. Детали машин / Д.Н. Решетов – М. : Машиностроение, 1989. – 496 с.

## Контрольні запитання

1. Що називається крученням?
2. Які внутрішні силові фактори мають місце при крученні?
3. За якою формулою обчислюються дотичні напруження при крученні?
4. Який вигляд має закон Гука при крученні?
5. Які геометричні характеристики використовуються при крученні некруглих профілів?
6. Де дотичні напруження досягають найбільшого значення при крученні прямокутного поперечного перерізу?
7. Що слід розуміти під раціональним розташуванням шківів?
8. Які системи називаються статично невизначуваними?
9. У якому порядку виконується розрахунок статично невизначуваних систем (методика розрахунку) при крученні?
10. У чому полягає деформаційна перевірка правильності розв'язання статично невизначуваної задачі при крученні?

# ЗМІСТ

<b>Вступ .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Розрахунки на міцність і жорсткість при крученні.....</b>	<b>4</b>
1.1. Основні поняття та визначення.....	4
1.2. Дотичні напруження при крученні для стержня круглого чи кільцевого перерізу .....	6
1.3. Розподіл дотичних напружень при крученні стержня круглого (кільцевого) перерізу. Розрахунок на міцність .....	10
1.4. Розрахунок на жорсткість .....	11
1.5. Потенційна енергія деформації при крученні .....	13
1.6. Розрахунок гвинтової циліндричної пружини з малим кроком .....	15
1.7. Кручення стержнів некруглого перерізу .....	23
1.8. Кручення стержнів прямокутного перерізу .....	24
1.9. Кручення стержнів довільної форми .....	26
1.10. Кручення тонкостінних стержнів .....	28
1.10.1. Кручення стержнів закритого профілю .....	28
1.10.1. Кручення стержнів відкритого профілю .....	29
1.11. Статично невизначувані системи при крученні .....	33
1.11.1. Розкриття статичної невизначуваності при послідовному з'єднанні ділянок стержня .....	34
1.11.2. Розкриття статичної невизначуваності при паралельному з'єднанні ділянок стержня .....	37
<b>2. Розрахунково-проектувальне завдання.....</b>	<b>40</b>
2.1. Склад розрахунково-проектувального завдання .....	40
2.2. Порядок виконання завдання .....	41
2.3. Розрахункові схеми та чисельні дані.....	44
2.3.1. Зразок виконання задачі 1 .....	56
2.3.2. Зразок виконання задачі 2 .....	60
2.3.3. Зразок виконання задачі 3 .....	67
<b>Список літератури.....</b>	<b>73</b>
<b>Контрольні запитання .....</b>	<b>74</b>

Навчальне видання

КОНОХОВ Володимир Іванович  
ХАВІН Валерій Львович  
АВТОНОМОВА Людмила Володимирівна

## **РОЗРАХУНКИ СТЕРЖНІВ ПРИ КРУЧЕННІ**

Навчально-методичний посібник з розділу курсу “Опір матеріалів”  
для студентів машинобудівних спеціальностей

Відповідальний за випуск Б.М. Киркач

Роботу до видання рекомендував С.К. Шелковий

Редактор Н.В. Ковшарь

План 2010 р., поз. 62/188-11

Підп. до друку \_\_\_\_\_. Формат 60\*84 1/16. Папір Могра.

Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум.друк. арк. 2,4. Обл.–вид. арк. 3,0.

Наклад 300. Зам. № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ “ХПІ”. Свідectво про державну реєстрацію ДК № 3657  
від 24.12.2009 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

Друкарня НТУ “ХПІ”, 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21